

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE A JEJICH VÝUKA VE ŠVÉDSKU

BERÁNKOVÁ Eliška

Univerzita Palackého v Olomouci, Katedra algebry a geometrie, 17. listopadu 1192, Olomouc,
77900

e-mail na hlavního autora: eliska.berankova01@upol.cz

Abstract: Tento článek se věnuje tématu exponenciálních funkcí a zejména pak aplikačním úlohám, ve kterých lze znalosti o exponenciálních funkcích využít. Inspirací pro tento článek byly stáže absolvované ve Švédsku a poznání nového pohledu na to, jak o exponenciálních funkcích uvažovat. V první části článku je představena definice exponenciální funkce ze švédského pohledu a druhá část je věnována samotným aplikačním úlohám. Prezentované úlohy pocházejí ze švédských učebnic a závěrečných testů a tematicky zasahují do mnoha oblastí.

Key words: exponenciální funkce, výuka exponenciálních úloh ve Švédsku, aplikační úlohy

Úvod

Během svého doktorského studia jsem měla možnost vyjet na dvě krátkodobé stáže do Švédska. V rámci projektu Pregraduál jsem v roce 2022 strávila týden na *University of Uppsala* a prostřednictvím programu Erasmus+ jsem letos na jaře vycestovala na dva týdny na *University of Linköping*. Cílem stáží bylo poznat švédský vzdělávací systém a zejména pak, vzdělávání budoucích učitelů matematiky.

V průběhu stáží jsem navštěvovala přednášky a cvičení na univerzitách, ale i vyučovací hodiny na středních školách (Katedralskolan v Uppsale a Linköpingu). Na hodinách jsem si všimla, že ve Švédsku definují exponenciální funkci jiným způsobem, než jak je zvykem u nás. V první části tohoto příspěvku bych ráda tento švédský princip představila a v druhé části uvedu několik řešených i neřešených aplikačních úloh na využití exponenciálních funkcí, které mě zaujaly ve švédských učebnicích a závěrečných testech z kurzů matematiky.

1 Jak definovat exponenciální funkci?

V rámci přípravy tohoto článku jsem prošla většinu učebnic, které se využívají k výuce matematiky na středních školách ([6], [7], [8], [14], [16]). Exponenciální funkce je v těchto učebnicích definována v menších obměnách následovně.

Definice 1. *Exponenciální funkce o základu a je funkce na množině $\mathbb{R}$ vyjádřená ve tvaru*

$$y = a^x,$$

kde a je kladné celé číslo různé od 1.

Oproti tomu najdeme ve švédských středoškolských učebnicích definici exponenciální funkce v následujícím tvaru.

Definice 2. *Funkce typu $y = C \cdot a^x$, kde C a a jsou konstanty ($a > 0$ a $a \neq 1$), se nazývá exponenciální funkce.*

C mění y —ovou souřadnici průsečíku s osou y a a je faktor změny ([2], str. 212-213; [3], str. 107).

K této definici je přidán ještě dodatek s vysvětlením:

y ... současná hodnota

C ... počáteční hodnota

a ... faktor změny

a^x ... faktor celkové změny

Tím, že se v předpisu exponenciální funkce objevuje hodnota C , získáváme možnost mnoha aplikací této funkce, což můžeme vidět na úlohách uvedených v druhé kapitole.

Obdobně jako ve švédských učebnicích je definována exponenciální funkce i v kurzu matematiky v rámci mezinárodního programu IB, čehož jsem si všimla během absolvovaných hodin na Katedralskolan. Dále dle bakalářské práce ([15], str. 33) je exponenciální funkce definována s koeficientem c (viz Definice 3) i v rakouských učebnicích, kde se tento koeficient objevuje dokonce i v definici mocninné funkce.

Definice 3. *Exponenciální funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je definována vztahem:*

$$f(x) = c \cdot a^x,$$

kde $c \in \mathbb{R}^ = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^+$*

V českých středoškolských učebnicích matematiky ([7], [14], [16]) se setkáváme s aplikačními úlohami z oblasti fyziky (závislost tlaku vzduchu na nadmořské výšce), chemie (příklady na poločas rozpadu) a biologie (rychlost množení bakterií). Tyto úlohy se ve více či méně obměněné podobě v jednotlivých učebnicích opakují a někdy se zde vyskytuje i pojem počáteční hodnota, ale ve zbytku kapitol se s tímto pojmem dále nepracuje. Ostatní příklady v kapitolách věnovaných exponenciálním funkcím se zaměřují zejména na konstrukci grafu k zadanému předpisu exponenciální funkce. Dále můžeme najít aplikační úlohy na exponenciální funkce v rámci kapitol věnovaných finanční matematice.

Největší množství aplikačních úloh nabízí učebnice Didaktika matematiky [8], kde najdeme celkem 10 úloh. Mezi nimi jsou tu úlohy s množením bakterií, radioaktivitou, vakuovou pumpou, ale nově se tu setkáváme s úlohou o rostoucím množství stromů v lese.

V učebnici Matika pro spolužáky [6] je exponenciální funkce zavedena jako v Definici 1, ale můžeme zde najít aplikační úlohu týkající se šíření informací. V zadání této úlohy si můžeme všimnout použití stejného předpisu, jaký využívají ve Švédsku při definování exponenciální funkce. Nicméně v úloze není vysvětleno, proč mají žáci využít právě tento vztah.

Příklad 1. *Závislost hmotnosti m radioaktivní látky na čase t při její radioaktivní přeměně je dána vzorcem*

$$m = m_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{T}},$$

kde m_0 značí počáteční hmotnost látky v čase 0 sekund a T je tzv. poločas přeměny (doba, za kterou se m_0 zmenší na jednu polovinu).

Poločas přeměny rádia A je přibližně 183 sekund. Vypočítejte jeho hmotnost (s přesností na setiny gramu) v časech $t = 10; 50; 100; 150; 183; 200; 250; 300; 350; 400; 450; 500$ (měřených v sekundách), je-li počáteční hmotnost $m_0 = 1$ g.

Zakreslete získané uspořádané dvojice do vhodné pravoúhlé soustavy souřadnic.

Příklad 2. *Závislost tlaku p vzduchu na nadmořské výšce h (v km) lze vyjádřit přibližně vztahem $p = p_0 \cdot 0,88^h$, kde p_0 je tlak v nadmořské výšce 0 metrů, $p_0 \doteq 1,013 \cdot 10^5$ Pa.*

a) *Vypočítejte tlak vzduchu v nadmořské výšce 800 m; 3000 m.*

b) *Vypočítejte, jaký je tlak vzduchu na vrcholcích těchto hor: Sněžka, Mont Blanc, Mont Everest.*

Příklad 3. *V klubu přátel se nachází 256 členů. Na tajné schůzi byla čtyřem členům sdělena velmi překvapující informace. Za jak dlouho se tuto informaci všichni dozvěděli, pokud víš, že předání informace z jedince na jedince trvá 3 minuty? Pro výpočet použij vzorec $N = N_0 \cdot 2^t$, kde N_0 je počáteční počet lidí, kteří informaci znají, a t počet „rozmnožení“ informace. Vyřeš graficky.*

2 Aplikační úlohy

Druhým cílem tohoto článku je uvést příklady několika aplikačních úloh k tématu exponenciálních funkcí. Uvedené úlohy mě zaujaly zejména svou aktuálností (např.: pandemie Covid-19 nebo důsledky rybolovu) a propojením konceptu exponenciální funkce s realitou, ve které studenti žijí. Motivací pro použití těchto aplikačních úloh ve výuce exponenciálních funkcí mohou být i výstupy z RVP pro gymnázia a odborné střední školy, které jsou popsány následovně: „žák modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí a řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích“ ([4], str. 24) a „žák řeší reálné problémy s použitím [...] funkcí zejména ve vztahu k danému oboru vzdělání“ ([5], str. 40).

Středoškolské vzdělávání ve Švédsku je tříleté. Jako student si můžete vybrat ze 6 studijních programů, po kterých se předpokládá následné studium na univerzitě (Přírodní vědy, Business Management a Ekonomie, Humanitní vědy, Sociální vědy, Technické studium, Umění) a z dalších 12 prakticky zaměřených oborů ([13], str. 3-4).

Matematika se na střední škole vyučuje celkem v 5 kurzech/předmětech, přičemž některé z nich mohou být studovány současně v jednom školním roce. Každý obor má dán počet kurzů, které musíte z matematiky během tříletého studia povinně absolvovat. Kurzy 1-3 jsou dále rozděleny na 3 úrovně, od nejjednodušší (a) po nejobtížnější (c). Matematika na úrovni a je vyučována na prakticky zaměřených oborech, zatímco úrovně b a c je určena pro studenty jmenovaných 6 oborů, kteří budou pravděpodobně pokračovat ve studiu i po ukončení střední školy. Pokusíme se studium matematiky vysvětlit na nejčastěji voleném studijním programu, kterým jsou Přírodní vědy. Pokud si žák zvolí toto studium, musí povinně absolvovat 3 kurzy matematiky

na úrovni c . Tedy kurzy $1c$, $2c$ a $3c$. Dále si může zvolit kurzy 4 a 5 jako povinně volitelné předměty ([9]).

Exponenciální funkce jsou zavedeny už v prvním kurzu a následně procvičovány v kurzech 2b a 2c ([1], [2], [3]), po nichž následuje celostátní závěrečná zkouška z níž jsem vybrala některé z níže uvedených příkladů. Další aplikační úlohy, které jsem vybrala, pocházejí ze švédských učebnic (1b a 1c). Úlohy jsem přeložila do češtiny a některé jsem upravila tak, aby bylo možné je použít v českém prostředí. Na začátek uvedu 3 řešené příklady a dále pak najdete další úlohy, u kterých uvádím správné odpovědi.

Příklad 4. ([10], str. 3) *V červnu roku 2000 byl zakoupen družstevní byt za 850 000 Kč. Stejný byt byl v červnu roku 2011 prodán za 1,6 milionů Kč. Předpokládejme, že roční procentuální nárůst byl po celou dobu stejně velký. Vypočítejte roční procentuální nárůst hodnoty družstevního bytu.*

Uvedu způsob řešení podle toho, jak by postupovali švédští studenti.

C = počáteční hodnota (původní cena bytu v Kč)

y = nová hodnota (aktuální cena bytu v Kč)

a = faktor změny

x = čas (počet let)

Dosadíme údaje, které známe ze zadání.

$$C = 850000$$

$$y = 1600000$$

$$x = 2011 - 2000 = 11$$

Nyní dosadíme do předpisu exponenciální funkce:

$$1600000 = 850000 \cdot a^{11}$$

$$\frac{1600000}{850000} = a^{11}$$

$$1,882 = a^{11}$$

$$a = \sqrt[11]{1,882}$$

$$a \doteq 1,059$$

Cílem úlohy je vypočítat roční procentuální nárůst hodnoty, takže z a neboli faktoru změny musíme ještě získat počet procent. Ve Švédsku se toto učí následovně:

$$a \cdot 100 - 100 = 1,059 \cdot 100 - 100 = 105,9 - 100 = 5,9\%$$

Odpověď: Procentuální nárůst ceny je o 5,9 % ročně.

Příklad 5. ([11], str. 2) *Největší zvíře, které kdy na zemi existovalo je plejtvák obrovský. Během posledních let drasticky klesl jejich počet z důvodu rybolovu. V roce 1900 žilo v oceánech přibližně 239 000 plejtváků a o sto let později byl jejich počet 2300. Předpokládejme, že jejich počet klesá exponenciálně. V jakém roce poprvé klesne počet plejtváků obrovských pod 200, pokud jich bude ubývat stále stejným tempem?*

Podobně jako u předchozího příkladu nejdříve popíšeme veškeré zadané hodnoty.

C = počáteční hodnota (původní počet plejtváků)
 y = výsledná hodnota (počet plejtváků k roku 2000)
 a = faktor změny
 x = počet let

Nyní doplníme hodnoty, které známe.

$C = 239000$
 $y = 2300$
 $x = 2000 - 1900 = 100$

Nejprve potřebujeme vypočítat tzv. faktor změny a teprve pak budeme hledat odpověď na otázku. Dosadíme známé hodnoty do předpisu exponenciální funkce.

$$\begin{aligned}2300 &= 239000 \cdot a^{100} \\ \frac{2300}{239000} &= a^{100} \\ a &= \sqrt[100]{\frac{2300}{239000}} \\ a &\doteq 0,9546\end{aligned}$$

Nyní se vrátíme k otázce. Máme zjistit, kdy klesne počet plejtváků pod 200. Tuto hodnotu dosadíme za y a budeme počítat neznámou x . Následuje řešení nerovnice:

$$\begin{aligned}200 &= 239000 \cdot 0,9546^x \\ \frac{200}{239000} &= 0,9546^x \\ \log \frac{200}{239000} &= \log 0,9546^x \\ \log \frac{200}{239000} &= x \cdot \log 0,9546 \\ x &= \frac{\log \frac{200}{239000}}{\log 0,9546} \\ x &= 152,5 \doteq 153\end{aligned}$$

Dále musíme interpretovat výsledek. Počítali jsme s počáteční hodnotou z roku 1900 a vyšlo nám, že počet plejtváků obrovských klesne pod 200 po 153 letech od roku 1900.

Odpověď: Počet plejtváků obrovských klesne pod 200 v roce 2053.

V této úloze můžeme postupovat i jinak. Po dopočítání faktoru změny můžeme v dalším výpočtu zvolit za počáteční hodnotu počet plejtváků v roce 2000.

Příklad 6. ([12], str. 4) První model počítače od známé firmy vyrábějící počítače byl vydražen v roce 2013. V souvislosti s dražbou byla v novinách otištěna následující zpráva:

„Cena počítače se tisícinásobně zvýšila od doby, kdy byl prvně prodán v roce 1976. Počítač ručně vyrobili dva zakladatelé společnosti, Steve Jobs a programátor Steve Wozniak, doma v Jobsově garáži.“

Podle novinového oznámení byl počítač v roce 2013 vydražen za cenu, která byla tisíckrát vyšší než původní cena počítače v roce 1976. Předpokládejme, že procentuální nárůst ceny byl každý rok stejný. Vypočítejte roční procentuální nárůst ceny počítače.

C = původní cena

y = nová cena

a = faktor změny

x = počet let

Vzhledem k tomu, že původní ani výslednou cenu neznáme, můžeme si za počáteční hodnotu dosadit 1, a protože víme, že výsledná cena počítače byla tisíckrát vyšší, tak ji snadno dopočítáme.

$$C = 1$$

$$y = 1000$$

$$x = 2013 - 1976 = 37$$

Nyní dosadíme do předpisu exponenciální funkce.

$$1000 = 1 \cdot a^{37}$$

$$1000 = a^{37}$$

$$a = \sqrt[37]{1000}$$

$$a = 1,205$$

$$1,205 \cdot 100 - 100 = 120,5 - 100 = 20,5\%$$

Procentuální nárůst ceny počítače byl o 20,5% ročně.

Příklad 7. ([2], str. 215) Funkce $f(x) = 35500 \cdot 1,015^x$ popisuje Viktorův měsíční plat v korunách, kde x je počet let ode dneška. Funkce platí pět let.

a) Jaká bude výše Viktorova platu za pět let?

b) Jaký má Viktor plat dnes?

c) O Kolik procent se Viktorovi zvyšuje každoročně plat?

Odpovědi: a) 38244 Kč, b) 35500 Kč, c) Mikolajovi se zvyšuje každoročně plat o 1,5 %.

Příklad 8. ([2], str. 215) V roce 2021 si Terka koupila nové auto. Zároveň se dočetla, že se očekává pokles hodnoty vozu podle funkce $f(x) = 240000 \cdot 0,85^x$, kde x je počet let po roce 2021.

a) Kolik stál nový vůz?

b) Vysvětlete, co znamená $f(3) = 170000$.

c) O kolik procent se každoročně mění hodnota vozu?

d) Na kterou otázku lze odpovědět vztahem $240000 \cdot 0,85^x < 100000$?

Odpovědi: a) 240000 Kč, b) Hodnota auta bude po 3 letech 170 000 Kč., c) Hodnota vozu klesá každoročně o 15%., d) Po kolika letech klesne hodnota vozu pod 100 000 Kč?

Příklad 9. ([1], str. 223) Podle průzkumu klesá hodnota horského kola po koupi o 13 % ročně. Nové horské kolo stojí 28 000 Kč.

a) Sestavte předpis funkce, který bude vyjadřovat hodnotu horského kola x let po jeho koupi.

b) Jaká je hodnota kola po 4 letech?

Odpovědi: a) $f(x) = 28000 \cdot 0,87^x$, b) 16 041 Kč.

Příklad 10. ([1], str. 223) Zisk společnosti je 15 milionů Kč.

a) Určete předpis funkce, která udává zisk v milionech Kč po 1 roce, pokud se zisk každý rok zvýší o 20 %.

b) Určete $f(2)$ a vysvětlete, co jste vypočítali.

c) Kolik let bude trvat, než se zisk firmy zdvojnásobí?

Odpovědi: a) $f(x) = 15 \cdot 1,2^x$, b) $f(2) = 21,6$ milionů Kč. Vypočítali jsme zisk společnosti po druhém roce. c) 4 roky.

Příklad 11. ([1], str. 227) Ve městě s 25 500 obyvateli exponenciálně roste počet lidí nakažených infekční chorobou. O stejný počet procent vzrostl počet nakažených dva týdny po sobě. Počet se zvýšil z 2365 na 2760 za dva týdny. O kolik procent se zvýšil jejich počet za týden?

Odpověď: Počet nakažených se za týden zvýšil o 8%.

Příklad 12. ([1], str. 228) Helena koupila akcie za 5 000 Kč a když je chtěla o tři měsíce později prodat, hodnota jejích akcií činila 3 200 Kč. Jaký byl průměrný pokles ceny akcií za měsíc?

Odpověď: Průměrný pokles ceny akcií byl o 14% za měsíc.

Příklad 13. ([1], str. 228) Umělec má v současné době několik sledujících na sociálních sítích. Předpokládáme, že se jejich počet zvyšuje měsíčně o stejné procento. Funkce $f(a) = 20000 \cdot a^3$ udává počet sledujících za tři měsíce, kde a je faktor změny za měsíc.

a) Kolik má umělec sledujících dnes?

b) Určete $f(1,25)$ a interpretujte svou odpověď.

c) Vyřešte rovnici $f(a) = 100000$ a interpretujte odpověď.

Odpovědi: a) 20 000, b) $f(1, 25) = 39063$, Umělec bude mít 39 063 sledujících za měsíc a čtvrt (za 5 týdnů), c) Umělec by měl 100 000 sledujících za 3 měsíce, pokud by průměrný nárůst sledujících byl o 71% měsíčně.

Ve švédských učebnicích se často pracuje s porovnáváním lineárního a exponenciálního růstu a poklesu, jak můžeme vidět na následujících úlohách.

Příklad 14. ([1], str. 231) *Teplota kávy v termosce se časem snižuje. Po nalití kávy do termosky je teplota kávy 95°C .*

- a) *Napište předpis funkce pro určení teploty kávy, pokud klesne o 5°C za hodinu.*
- b) *Napište předpis funkce pro teplotu kávy, pokud klesne o 10% za hodinu.*
- c) *Který vzorec podle vás nejlépe popisuje realitu? Proč si to myslíte?*

Odpovědi: a) $f(x) = 95 - 5x$, kde x je počet hodin, b) $g(x) = 95 \cdot \frac{17}{19}^x = 95 \cdot 0,895^x$, kde x je počet hodin, c) Možnost diskuse a experimentálního ověření.

Příklad 15. ([1], str. 230) *Existují dvě různé funkce pro počet návštěvníků v zoo. Neznámá x označuje počet let.*

Funkce A: $f(x) = 40000 + 12000x$

Funkce B: $g(x) = 40000 \cdot 1,2^x$

- a) *Kolik návštěvníků je dnes v zoo?*
- b) *Která z funkcí je exponenciální? Vysvětlete, co předpis funkce znamená?*
- c) *Vysvětlete, co znamená druhý předpis funkce?*
- d) *Podle které funkce přijde do zoo za 5 let více návštěvníků?*

Odpovědi: a) 40000 návštěvníků, b) Funkce B. Předpis funkce říká, že každý rok přijde do zoo o 20% návštěvníků více., c) Funkce A říká, že každý rok se zvýší počet návštěvníků o 12 000., d) Podle funkce A.

Ve švédských učebnicích mě dále zaujaly úlohy, kde musí žáci k danému předpisu sami vymyslet situaci ze života. Tato úloha nabízí opravdu velké množství možných odpovědí a žáci na ní mohou prokázat, nakolik rozumí exponenciálním funkcím a jejich propojení s reálnými situacemi.

Příklad 16. ([2], str. 216) *Uvedte svůj vlastní příklad situace, která:*

- a) *je popsána vztahem $y = 12000 \cdot 1,015^x$*
- b) *je popsána vztahem $6000 = c \cdot 0,95^x$*

Možné odpovědi: a) V tomto případě se jedná o nárůst počáteční hodnoty a můžeme zde uvažovat například o spoření peněz, o nárůstu počtu lidí nebo turistů ve městě, o počtu prodaných lístků do kina nebo o vzrůstajícím počtu lidí, kteří jezdí do práce na kole. b) Druhý příklad ukazuje naopak pokles počáteční hodnoty a zde může jít například o snížení ceny výrobku, o pokles prodeje energetických nápojů nebo o snižování emisí.

Závěr

Článek představuje způsob, jakým se ve Švédsku vyučuje o exponenciálních funkcích a dále nabízí sbírku aplikačních úloh, které se ve Švédsku využívají při výuce exponenciálních funkcí na středních školách. Uvedené úlohy mohou sloužit jako inspirace pro středoškolské a vysokoškolské učitele matematiky a k prohloubení pochopení tohoto učiva u studentů.

Reference

- [1] ALFREDSSON, L., HEIKNE, H. 2021. Matematik 5000+ Kurs 1b Lärobok Upplaga 2021. ISBN 9789127455290.
- [2] ALFREDSSON, L., HEIKNE, H., BODEMYR, S. 2021. Matematik 5000+ Kurs 1c Lärobok Upplaga 2021. ISBN 9789127460560.
- [3] ALFREDSSON, L., HEIKNE, H., BODEMYR, S. 2021. Matematik 5000+ Kurs 2c Lärobok Upplaga 2021. ISBN 9789127460577.
- [4] MŠMT. 2022. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia 79–41/K-41 [online]. [cit. 2024-05-01]. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2020/08/RVPG-2007-07_final.pdf
- [5] MŠMT. 2023. Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 63–41–M/02 Obchodní akademie [online]. [cit. 2024-04-30]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvpsov/ciste/63-41-M02.pdf>
- [6] LIŠKA, M., VALENTA, T., KRÁL, L. 2016. Matika pro spolužáky - Funkce. ISBN 9788090658813.
- [7] ODVÁRKO, O. 1993. Matematika pro gymnázia: Funkce. ISBN 978-80-7196-357-8
- [8] POLÁK, J. 2014. Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně. ISBN 9788072384495.
- [9] Skolverket [online]. [cit. 2024-05-02]. Dostupné z: <https://www.skolverket.se/>
- [10] Skolverket. 2013. Nationella prov i Matematik 2b [online]. [cit. 2024-04-30] Dostupné z: <https://arkiv.edusci.umu.se/np/np-2-4-prov/Ma2b-ht13.pdf>
- [11] Skolverket. 2015. Nationella prov i Matematik 2b [online]. [cit. 2024-05-01] Dostupné z: <https://arkiv.edusci.umu.se/np/np-2-4-prov/Ma2b-vt15.pdf>
- [12] Skolverket. 2015. Nationella prov i Matematik 2c [online]. [cit. 2024-04-28] Dostupné z: <https://arkiv.edusci.umu.se/np/np-2-4-prov/Ma2c-vt15.pdf>
- [13] Skolverket. 2011. Overview of the Swedish upper secondary school. [online] [cit. 2024-05-02] <https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a659a16/1553964183391/pdf2748.pdf>
- [14] TLUSTÝ, P. 2019. Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě - Funkce. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-493-0.

- [15] VYTLAČILOVÁ, L. 2020. Rakouské učebnice matematiky pro vyšší gymnázia [online]. [cit. 2024-05-09]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/ig553/Bakalarska_prace.pdf
- [16] ZEMEK, V. 2014. Matematika pro střední školy - 5. díl. Funkce II. Učebnice. ISBN 978-80-7358-217-3.