

Pojem posloupnost a její způsoby určení

Posloupnosti a řady

Posloupnosti a jejich vlastnosti



Výpisky

- > Posloupnost je **uspořádaná řada čísel**. Na pořadí záleží.
- > Nejčastější způsoby určení posloupnosti jsou: **výčtem členů**, **přímým vzorcem pro n -tý člen** a **rekurentním vzorcem**.
- > V zadání pomocí **výčtu členů** je nutné zadat vždy **všechny** členy. Toto lze provést jen u **konečných posloupností**, nikoliv u **nekonečných posloupností**.
- > Zadání pomocí **přímého vzorce pro n -tý člen** je předpis pro výpočet n -tého členu. Je vhodné zejména tam, kde je potřeba rychle určit hodnotu n -tého členu.
- > **Rekurentní vzorec** je zadání, které musí obsahovat hodnotu prvního členu a předpis pro výpočet $n + 1$ členu. U tohoto typu zadání musíš pro výpočet hodnoty n -tého členu spočítat všechny hodnoty předchozích členů.



Příklad 1 ★★★

Více o postupu v učebnici na straně 16

Je dána posloupnost $a_1 = 9$, $a_{n+1} = a_n - 4$. Urči hodnotu třetího členu posloupnosti.



Poznámky



Příklad 2 ★★★

Jak na to najdeš v učebnici na straně 15

Urči posloupnost $\{5; 8; 11; 14; 17; \dots\}$ rekurentním vztahem.



Příklad 3

Kompletní vysvětlení najdeš v učebnici na straně 16

Urči hodnoty prvních pěti členů posloupnosti dané vzorcem pro n -tý člen:

a) $\{5n\}_{n=1}^{\infty}$ ★★★

Vlastnosti posloupností

Posloupnosti a řady

Posloupnosti a jejich vlastnosti



Výpisky

- Posloupnost je **rostoucí**, jestliže pro všechna n platí, že $a_{n+1} > a_n$.
- Posloupnost je **klesající**, jestliže pro všechna n platí, že $a_{n+1} < a_n$.
- Pokud je posloupnost rostoucí či klesající jedná se o posloupnost **ryze monotónní**.
- **Alternující** posloupnost je taková, když se střídají dvě čísla nebo znaménka daného čísla. Tato posloupnost pak vypadá například $\{1; -1; 1; -1; \dots\}$.
- Mezi **posloupnosti monotónní** patří posloupnost nerostoucí a neklesající:
 - Posloupnost je **nerostoucí**, jestliže pro všechna přirozená n platí, že $a_{n+1} \leq a_n$.
 - Posloupnost je **neklesající**, jestliže pro všechna přirozená n platí, že $a_{n+1} \geq a_n$.
- Posloupnost může být **shora omezená**, **zdola omezená** nebo **omezená**:
 - Pro posloupnost **shora omezenou** platí, že existuje reálné číslo h takové, že pro všechna přirozená n je $a_n \leq h$.
 - Pro posloupnost **zdola omezenou** platí, že existuje reálné číslo d takové, že pro všechna přirozená n je $a_n \geq d$.
 - **Posloupnost omezená** je taková, která je omezená shora i zdola zároveň.



Příklad 1 ★★★

Postup najdeš v učebnici na straně 22

Je dána posloupnost $\{(-n^2) + 22n - 21\}_{n=1}^{\infty}$. Pro která n je tato posloupnost klesající?



Poznámky

Matematická indukce

Posloupnosti a řady

Posloupnosti a jejich vlastnosti



Výpisky

- Dokazovaná rovnost má obsahovat pouze výrazy, obsahující přirozená čísla. Jinak nebude fungovat **princip indukce**. Ten ti říká, že pokud do přirozených čísel patří nějaké číslo, patří tam i číslo o jedničku vyšší.
- Tvzení nejprve dokážu pro jedničku. Když to nefunguje, zkusím jiné malé přirozené číslo (většinou hned dvojku).
- Zaveď si **indukční předpoklad**. Indukční předpoklad je tvrzení zformulované pro nějakou konečnou hodnotu proměnné.
- Jde o to dokázat, že pokud tvrzení platí pro nějaké přirozené číslo (indukční předpoklad), platí i pro číslo o jedničku větší. Aby platila implikace „ $V(k) \Rightarrow V(k+1)$ “, žádné další předpoklady než indukční předpoklad nekladeš.
- Dosadíš za k výraz $k+1$ a upravuješ obě strany rovnosti tak dlouho, dokud nedostaneš indukční předpoklad.
- Důkaz indukcí lze použít i pro důkaz platnosti nerovnosti.



Příklad 1 ★★★

Více o postupu v učebnici na straně 26

Dokaž matematickou indukcí pro $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



Poznámky



Příklad 2 ★★★

Tápeš? Tak mrkni do učebnice na stranu 27

Dokaž matematickou indukcí pro $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Aritmetická posloupnost a její vlastnosti a užití

Posloupnosti a řady

Aritmetická a geometrická posloupnost



Výpisky

- Posloupnost se nazývá **aritmetická** právě když existuje takové reálné číslo d , že pro každé přirozené číslo n platí $a_{n+1} = a_n + d$. Toto zadání je **rekurentní zadání aritmetické posloupnosti**.
- Druhou možností zadání aritmetické posloupnosti je zadání pomocí **přímého vzorec pro n -tý člen**, $a_n = a_1 + d(n - 1)$. Ten lze zobecnit na $a_n = a_m + d(n - m)$, kde n je pořadí požadovaného členu a m je pořadí výchozího, obecně ne vždy prvního členu.
- Písmeno d značí **diferenci**. Diference je rozdíl hodnot dvou po sobě jdoucích členů (o kolik se změnila hodnota mezi dvěma po sobě jdoucími členy).
- **Součet prvních členů** aritmetické posloupnosti lze spočítat pomocí vzorce $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.



Příklad 1

Máš s tím problém? Mrkni do učebnice na stranu 34

Vypiš prvních sedm členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

a) $a_1 = 5, d = -2$ ★★★

b) $a_7 = 10, a_{12} = 25$ ★★★

c) $a_8 = 6, d = 12$ ★★★



Poznámky

Geometrická posloupnost a její vlastnosti a užití

Posloupnosti a řady

Aritmetická a geometrická posloupnost

Výpisky

- Posloupnost se nazývá geometrická, právě když existuje takové reálné číslo q , že pro každé přirozené číslo n platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Toto je **rekurentní zadání geometrické posloupnosti**.
- **Přímý vzorec pro n -tý člen** geometrické posloupnosti je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Ten lze zobecnit jako $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$.
- Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti. Kvocient je podíl dvou sousedních členů, tj.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
- Jestliže $q \neq 1$, pak pro **součet prvních členů** geometrické posloupnosti (s_n) platí $s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} a_1$.
- Jestliže $q = 1$, pak pro **součet prvních členů** geometrické posloupnosti (s_n) platí $s_n = a_1 \cdot n$.



Příklad 1

Máš s tím problém? Mrkni do učebnice na stranu 45

Napiš prvních 6 členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pokud platí:

a) $a_1 = 8, a_4 = 216$ ★★★

b) $a_1 = -2, q = \frac{1}{2}$ ★★★



Poznámky

Jednoduché úrokování

Posloupnosti a řady

Aritmetická a geometrická posloupnost



Výpisky

- **Vzorec** pro výpočet konečné částky, když nic nevkládáš ani nevybíráš, a úrok se dál neúročí, je:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot k \cdot i)$$

Diagrammatic labels for the formula above:

- počet úrokovacích období (points to n)
- úroková míra (desetinné číslo) (points to i)
- hodnota vkladu po n obdobích (points to K_n)
- počáteční kapitál (jistina) (points to K_0)
- zdaňovací koeficient (points to k)

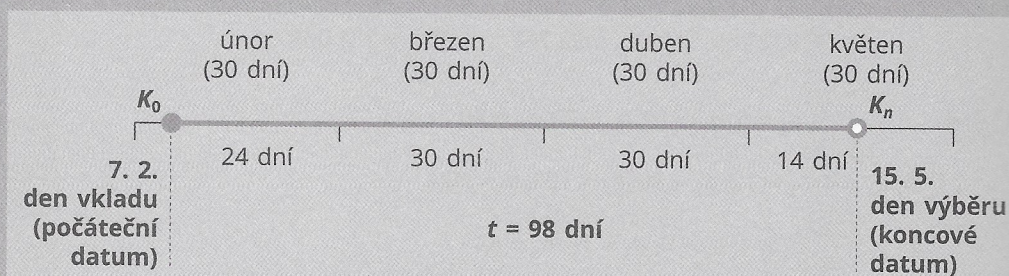
- **Úrok** se vypočítá pomocí vzorce:

$$u_n = K_0 \cdot n \cdot k \cdot i$$

Diagrammatic labels for the formula above:

- počet úrokovacích období (points to n)
- úroková míra za úrokovací období (desetinné číslo) (points to i)
- hodnota úroku po n obdobích (points to u_n)
- počáteční kapitál (jistina) (points to K_0)
- zdaňovací koeficient (points to k)

- Při počítání půjčky či spoření v rámci dnů se den vložení započítává, kdežto den výběru už ne. Měj na paměti, že ve finanční matematice 1 měsíc = 30 dnů, 1 rok = 360 dnů.



- **Inflace** je znehodnocování peněz během času. Opakem je **deflace**, tj. zhodnocování peněz.
- Nejčastější **investiční nástroje** s garantovaným vkladem jsou: stavební spoření, běžný účet, spořicí účet a termínovaný vklad.
- **Cenné papíry** jsou akcie a dluhopisy. Vývoj jejich cen není ničím garantován. Minimalizace rizika se dosáhne investicí do tzv. **podílových fondů**.
- Banky často zaokrouhlují tak, aby jejich zisk byl co nejvyšší a naopak jejich výdaje co nejnižší. V této učebnici se ale bude **zaokrouhlovat** dle **matematických pravidel**.
- **Daň z úroku**, pokud zadání neuvádí jinak, se uvažuje pouze při spoření.

Složené úrokování a RPSN

Posloupnosti a řady

Aritmetická a geometrická posloupnost



Výpisky

- **Složené úrokování** se řídí vzorcem pro n -tý člen geometrické řady, který vypadá:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i)^n$$

částka po n úrokovacích obdobích ← K_n ← počáteční kapitál

K_0 ← počáteční kapitál

$(1 + k \cdot i)^n$ ← počet úrokovacích období

$k \cdot i$ ← úroková míra za úrokovací období (desetinné číslo)

k ← zdaňovací koeficient

- **Střádání** probíhá tak, že klient uloží na začátku do banky určitou částku a poté vloží na konci každého úrokovacího období vždy opět tutéž částku. Celková naspořená částka se počítá jako:

$$K_n = K_0 \frac{(1 + k \cdot i)^{n+1} - 1}{k \cdot i}$$

částka po n úrokovacích obdobích ← K_n ← pravidelný vklad za úrokovací období

K_0 ← počáteční kapitál

$(1 + k \cdot i)^{n+1} - 1$ ← n počet úrokovacích období

$k \cdot i$ ← úroková míra za úrokovací období (desetinné číslo)

k ← zdaňovací koeficient

- U **umořování dluhu** je důležité vědět, kolik zaplatíš s každou splátkou. Výše splátky se počítá:

$$S = \frac{D \cdot (1 + i)^n \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$$

půjčená částka ← D ← výše splátky (anuita)

$(1 + i)^n \cdot i$ ← počet úrokovacích období (počet splátek)

$(1 + i)^n - 1$ ← úroková míra za úrokovací období (desetinné číslo)

i ← úroková míra za úrokovací období (desetinné číslo)

- Nejčastější typy úvěrů jsou **hypoteční**, **spotřební** a **kontokorent**. Poslední jmenovaný se obvykle čerpá pomocí **kreditní karty**.
- **RPSN** neboli **roční procentuální sazba nákladů** je číslo charakterizující výhodnost úvěru pro klienta banky. Obsahuje výši úroku i poplatky. Čím je nižší, tím je úvěr pro klienta výhodnější.



Příklad 1 ★★★

Tápeš? Tak mrkni do učebnice na stranu 57

Občan Petrželka vložil do banky na účet částku 15 000 Kč s úrokem 7 % p. a. a s ročním úrokovacím obdobím. Kolik korun celkem bude mít na účtu za 4 roky?



Poznámky

Pojem limita posloupnosti

Posloupnosti a řady

Limity posloupností a nekonečné řady



Výpisky

- **Limita posloupnosti** je číslo, ke kterému se blíží hodnoty zadané posloupnosti.
- Ne každá posloupnost musí mít limitu.
- Posloupnost a_n má limitu L , jestliže platí, že pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $\varepsilon > |a_n - L|$.
- Číslo ε je vzdálenost zvolených „hranic“ od limity. Vzdálenost nemůže být záporná, proto $\varepsilon > 0$.
- Posloupnosti, která má limitu a je jí reálné číslo L , se říká **konvergentní**. Ta, která má limitu plus mínus nekonečno nebo limitu nemá, se nazývá **divergentní**. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
- Limita se obecně zapisuje jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = 1 \rightarrow \begin{array}{l} \text{hodnota limity} \\ \text{(značí se jako „L“)} \\ \hline \text{zadaná posloupnost} \end{array}$$



Příklad 1

Jak počítat tenhle typ příkladu je v učebnici na straně 67



Poznámka

Najdi limitu posloupnosti:

a) $a_n = \frac{5}{2n} + 1$ ★★★

b) $a_n = 12 - \frac{3n}{2}$ ★★★

c) $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}$ ★★★

Vlastnosti limity, věty o limitách posloupnosti

Posloupnosti a řady

Limity posloupností a nekonečné řady

Výpisky

- Každá posloupnost může mít **nejvýše jednu limitu**.
- Konvergentní posloupnost je **vždy omezená**.
- **Konstantní posloupnost** je konvergentní. Hodnota každého členu této posloupnosti je zároveň hodnotou její limity.
- **Sčítáš-li** dvě konvergentní posloupnosti, pak **limita součtu je součtem limit** těchto dvou posloupností.
- **Odečítáš-li** dvě konvergentní posloupnosti, pak **limita rozdílu je rozdílem limit** těchto dvou posloupností.
- **Násobíš-li** dvě konvergentní posloupnosti, pak **limita násobku je násobkem limit** těchto dvou posloupností.
- **Dělíš-li** dvě konvergentní posloupnosti, pak **limita podílu je podílem limit** těchto dvou posloupností. Ve jmenovateli se nesmí objevit 0, ve jmenovateli tedy nesmí být posloupnost, jejíž limitou je 0, ani žádný její člen nesmí nabývat 0.
- Pokud bude mít **aritmetická posloupnost** diferenci $d = 0$, pak bude tato posloupnost **konvergentní**. Pokud bude **diference** $d \neq 0$, pak bude tato posloupnost **divergentní**.
- U **geometrické posloupnosti** záleží na hodnotě kvocientu q . Pokud bude $-1 < q < 1$, pak bude geometrická posloupnost **konvergentní**. Pokud bude $q = 1$, také bude tato posloupnost **konvergentní**. Ve všech ostatních případech bude geometrická posloupnost divergentní.



Příklad 1

Jak počítat tenhle typ příkladu je v učebnici na straně 74

Rozhodni, zda je limita posloupnosti konvergentní nebo divergentní:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n+6}{4n^2} \right) \star \star \star$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \star \star \star$



Poznámky

Nevlastní limita posloupnosti

Posloupnosti a řady

Limity posloupností a nekonečné řady



Výpisky

- > **Limity** lze rozdělit na vlastní a nevlastní.
- > Existují dva typy nevlastních limit posloupnosti: $+\infty$ a $-\infty$
- > Posloupnost (a_n) má nevlastní limitu **plus nekonečno**, právě když pro každé reálné číslo K existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n > K$.
- > Posloupnost (a_n) má nevlastní limitu **mínus nekonečno**, právě když pro každé reálné číslo K existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n < K$.
- > **Posloupnosti**, které mají nevlastní limitu nejsou považovány za konvergentní. Jedná se o posloupnosti divergentní, stejně jako posloupnosti, které žádnou limitu nemají.
- > Neurčité výrazy:

$0 \cdot \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞
------------------	-------------------------	---------------	-------------------	-------	------------	------------

- > Pravidla pro počítání s nekonečnem:

$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$k \cdot \infty = \infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$	$\infty^\infty = \infty$	$-\infty \cdot \infty = -\infty$	$\infty + k = \infty$
----------------------------	--------------------------------	---------------------------	------------------------	--------------------------	----------------------------------	-----------------------

kde k je libovolné konečné reálné číslo.



Příklad 1 ★★★

Postup najdeš v učebnici na straně 81

Hrneček v pohádce Hrnečku vař, vaří kaši tak, že se její nárůst v čase nechá popsat výrazem: $3n^2 + n - 3$, kde n je čas. Spočítej, jestli hrneček bude produkovat neomezené množství kaše, či ne.



Poznámka

Nekonečná geometrická řada

Posloupnosti a řady

Limity posloupností a nekonečné řady



Výpisky

- **Členy posloupnosti částečných součtů** s_n jsou součty prvních n členů posloupnosti a_n . Posloupnost částečných součtů s_n pro posloupnost a_n se získá jako:
 $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
- Součtu **všech členů** posloupnosti a_n se říká **nekonečná řada**. Ta se značí symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jde o součet všech členů posloupnosti a_n : $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$.
- **Vzorec pro n -tý člen posloupnosti částečných součtů** s_n geometrické řady závisí na hodnotě kvocientu q .
 - Jestliže kvocient $q \neq 1$, tak pro součet prvních členů geometrické posloupnosti s_n platí $s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} a_1$.
 - Jestliže $q = 1$, pak pro součet prvních členů geometrické posloupnosti s_n platí $s_n = a_1 n$. Oba tyto vzorce jsou zároveň vzorcem pro n -tý člen posloupnosti částečných součtů s_n .
- Pokud je geometrická posloupnost a_n **divergentní**, pak také posloupnost částečných součtů s_n je divergentní neboli nekonečná řada je divergentní a nemá součet.
- Jestliže je geometrická posloupnost a_n **konvergentní**, záleží konvergence posloupnosti částečných součtů s_n na hodnotě kvocientu q .
 - Je-li hodnota kvocientu geometrické posloupnosti $q = 1$, je tato geometrická posloupnost a_n **konvergentní**. Bude-li a_1 různé od 0, pak posloupnost částečných součtů takovéto geometrické posloupnosti bude mít limitu nevlastní, tedy $+\infty$ či $-\infty$, jedná se o posloupnost divergentní. Nekonečná řada je tedy **divergentní** a nemá součet.
 - Je-li hodnota kvocientu geometrické posloupnosti $-1 < q < 1$, je tato geometrická posloupnost a_n **konvergentní**. Bude-li a_1 různé od 0, pak posloupnost částečných součtů bude konvergentní, bude mít vlastní limitu. Nekonečná řada je také **konvergentní**, limita posloupnosti se nazývá součet nekonečné řady.
- Pro **součet konvergentní nekonečné geometrické řady** platí $s = \frac{a_1}{1 - q}$.



Příklad 1

★★★

Nevíš jak na to? Koukni do učebnice na stranu 89

Urči součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{4}{7} \right)^n \right]$.



Poznám