

Níže uvedený seznam obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z tematického okruhu Posloupnosti a finanční matematika, které mohou být ověřovány v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky.

Žák dovede:

5.1 Základní poznatky o posloupnostech

- aplikovat znalosti o funkcích při úvahách o posloupnostech a při řešení úloh o posloupnostech;
- určit posloupnost vzorcem pro n -tý člen, graficky a výčtem prvků.

5.2 Aritmetická posloupnost

- určit aritmetickou posloupnost a chápat význam difference;
- užít základní vzorce pro aritmetickou posloupnost.

5.3 Geometrická posloupnost

- určit geometrickou posloupnost a chápat význam kvocientu;
- užít základní vzorce pro geometrickou posloupnost.

5.4 Využití posloupností pro řešení úloh z praxe, finanční matematika

- užít poznatky o posloupnostech při řešení problémů v reálných situacích;
- řešit úlohy z oblasti finanční matematiky.

(Zdroj: <http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/katalogy-pozadavku-zkousek-spolecne-casti-maturitni-zkousky-1>; upraveno)

Více informací potřebných k řešení úloh v rámci tematického celku Posloupnosti a finanční matematika najdete v těchto publikacích nakladatelství Didaktis:

- Odmaturuj z matematiky 1 (kapitoly 20–23)
- Odmaturuj z matematiky 3 (kapitoly 20–23)
- Matematika pro střední školy – 9. díl: Posloupnosti, řady, finanční matematika

1 Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána vzorcem pro n -tý člen $a_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1.1–1.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

1.1 Všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou záporná čísla.

A	N
☐	☐

1.2 První člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je čtyřnásobkem třetího členu.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

1.3 Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

1.4 Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

2 Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (12n - n^2)_{n=1}^{\infty}$.

2.1 Určete, kolikátým členem posloupnosti je číslo 27. Uveďte všechna řešení.

2.2 Určete všechna $n \in \mathbf{N}$, pro která je $a_n < 0$.

2.3 Určete největší člen posloupnosti (jeho pořadí a hodnotu), pokud existuje.

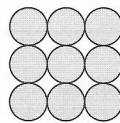
2.4 Určete všechna $n \in \mathbf{N}$, pro která součet $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ prvních n členů posloupnosti nabývá maximální hodnoty.

3 Žetony byly uspořádány do čtverců.

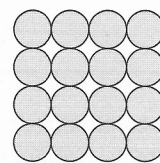
Uvažujte posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $n \in \mathbf{N}$, jejíž členy udávají počty žetonů v jednotlivých čtvercích (1. člen posloupnosti udává počet žetonů v 1. čtverci, 2. člen posloupnosti počet žetonů v 2. čtverci atd.).



1. čtverec



2. čtverec



3. čtverec

...

3.1 Napište vzorec pro n -tý člen posloupnosti.

3.2 Zapište rozdíl členů a_n a a_{n-1} (v uvedeném pořadí) v závislosti na n , kde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

3.3 Ve třech po sobě následujících čtvercích je dohromady 1 589 žetonů. Určete pořadí těchto čtverců.

4 Přiřad'te ke každé posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (4.1–4.3) její 5. člen (A–E).

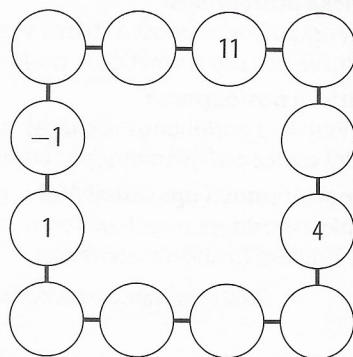
4.1 Aritmetická posloupnost: $a_7 = 4,5; d = -\frac{3}{4}$

4.2 Aritmetická posloupnost: $a_1 = -1; a_4 - a_3 = \frac{1}{4}$

4.3 Geometrická posloupnost: $a_4 = -3; \frac{a_6}{a_3} = -\frac{1}{27}$

A) -1
B) 0
C) 1
D) 3
E) 6

5 Čísla zapsaná do čtyř políček na každé vodorovné straně čtverce tvoří čtyři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, čísla zapsaná do čtyř políček na každé svislé straně čtverce tvoří čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Šest čísel je kladných, šest čísel je záporných. **Doplňte chybějící čísla.**



6 Označme s_n součet prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $n \in \mathbf{N}$, s diferencí d . V aritmetické posloupnosti platí: $s_1 = 15$, $s_2 = 20$. Které z následujících tvrzení je **nepravdivé**?

A) $d = -10$ B) $a_5 < a_4$ C) $s_3 = s_1$ D) $s_4 = 0$ E) $s_5 > s_4$

7 Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a geometrickou posloupnost $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: $a_1 = g_1 = 1$, $a_{11} = g_{11}$ a součet prvních 11 členů aritmetické posloupnosti je $s_{11} = 181,5$.

7.1 Určete všechny aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vyhovující podmínkám úlohy, posloupnosti zapište vzorcem pro n -tý člen, $n \in \mathbf{N}$.

7.2 Určete všechny geometrické posloupnosti $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ vyhovující podmínkám úlohy, posloupnosti zapište vzorcem pro n -tý člen, $n \in \mathbf{N}$.

8 V oboru $\mathbf{R}$ řešte rovnici:

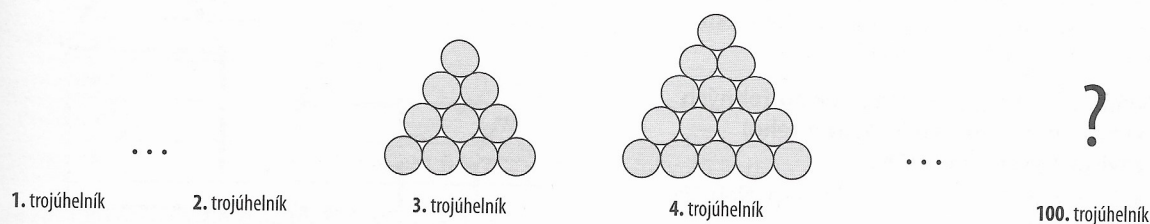
$$x + 3x + 5x + \dots + 995x + 997x + 999x = 1\,001 + 1\,003 + 1\,005 + \dots + 1\,995 + 1\,997 + 1\,999$$

9 Sečtete všechna trojciferná přirozená čísla, která jsou menší než 450 a zároveň **nejsou** dělitelná šesti. Které číslo dostanete?

A) 15 834 B) 80 241 C) 84 375 D) 96 075 E) 107 691

10 Délky v centimetrech tří hran kváдру vycházející z jednoho jeho vrcholu jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Objem kváдру je 216 cm^3 . Obsah stěny s největším obsahem je 90 cm^2 . Určete v centimetrech délky hran kváдру.

- 11 Korunové mince jsou uspořádány do trojúhelníků. Ve spodní řadě každého následujícího trojúhelníku je o jednu minci více.

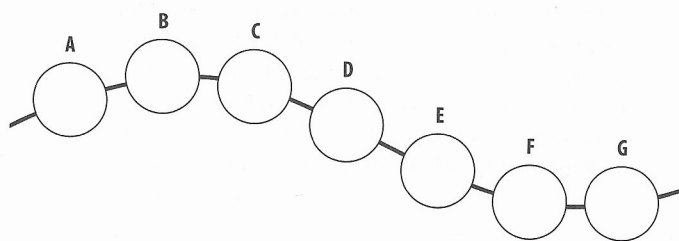


Kolik mincí celkem je potřeba k sestavení 100. trojúhelníku?

- A) 5 000 B) 5 050 C) 5 151 D) 5 202 E) jiný počet

- 12 Do každého z políček A–G se má vepsat právě jedno reálné číslo tak, aby současně platilo:

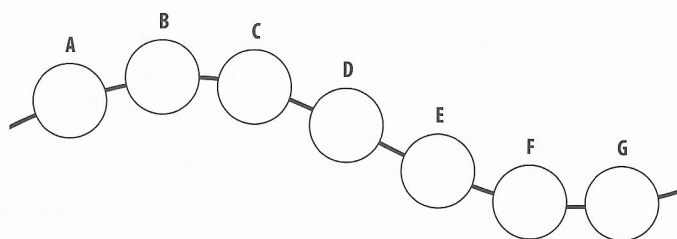
1. V políčku D je zapsáno číslo -2 .
2. Součet čísel zapsaných v políčkách B a G je $-2,8$.
3. Rozdíl čísel zapsaných do každých dvou po sobě bezprostředně následujících políček je stejný.



Určete číslo vepsané do políčka F.

- 13 Do každého z políček A–G se má vepsat právě jedno reálné číslo tak, aby současně platilo:

1. V políčku C je zapsáno číslo $\frac{1}{2}$.
2. Součin čísel zapsaných v políčkách C a D je $\frac{3}{4}$.
3. Podíl čísel zapsaných do každých dvou po sobě bezprostředně následujících políček je stejný.



Určete čísla vepsaná do políček A–G.

- 14 Strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$ mají délky 16 cm, 24 cm a 32 cm.

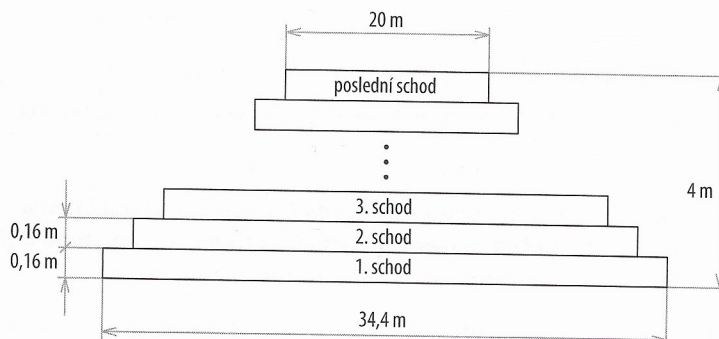
Do trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je vepsán další trojúhelník $A_2B_2C_2$ tak, že jeho vrcholy jsou středy stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Do trojúhelníku $A_2B_2C_2$ je vepsán stejným způsobem trojúhelník $A_3B_3C_3$ atd.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (14.1–14.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

- 14.1 Nejkratší strana trojúhelníku $A_3B_3C_3$ má délku 4 cm.
 14.2 Obvod trojúhelníku $A_5B_5C_5$ je 4,5 cm.
 14.3 Součet obvodů trojúhelníků $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_7B_7C_7$ je $142\frac{7}{8}$ cm.
 14.4 Obsah trojúhelníku $A_8B_8C_8$ je 16krát větší než obsah trojúhelníku $A_{12}B_{12}C_{12}$.

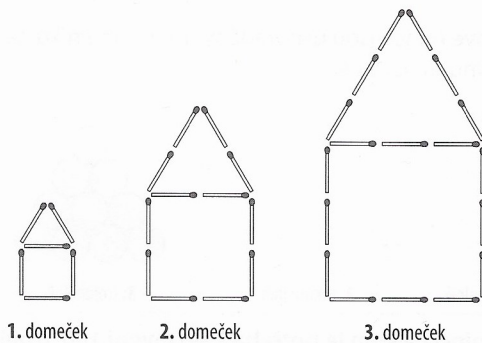
A	N
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐

- 15 Schodiště ke vstupu do divadla je vysoké 4 m. Nejdelší schod je dlouhý 34,4 m, každý následující schod se vždy zkracuje o stejnou délku. Nejkratší schod je dlouhý 20 m. Každý schod má výšku 0,16 m. Vypočítejte délku 10. schodu. Výsledek udejte v metrech.



- 16 První domeček byl vytvořen ze 6 zápalek, druhý z 12 zápalek, třetí z 18 zápalek atd. K sestavení každého následujícího domečku bylo potřeba vždy o 6 zápalek více.

- 16.1 Vyjádřete celkový počet zápalek potřebných k vytvoření n domečků (tj. 1. až n -tého) v závislosti na n , kde $n \in \mathbb{N}$.
- 16.2 Na vytvoření n domečků se celkem spotřebovalo 4 920 zápalek. Vypočtete, kolik domečků bylo vytvořeno.

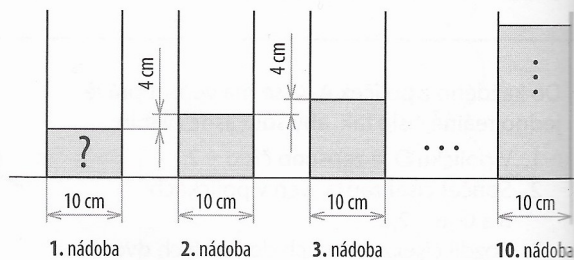


1. domeček

2. domeček

3. domeček

- 17 Do deseti stejných prázdných válcových nádob s vnitřním průměrem dna 10 cm rozlijeme $6,5\pi$ litrů vody tak, aby hladina vody v 2. nádobě byla o 4 cm výše než hladina vody v 1. nádobě, hladina vody ve 3. nádobě o 4 cm výše než v 2. nádobě atd. V každé další nádobě bude hladina vody o 4 cm výše. Kolik litrů vody nalijeme do 1. nádoby?



1. nádoba

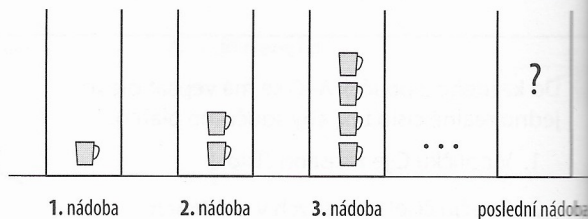
2. nádoba

3. nádoba

10. nádoba

- A) $0,1\pi$ B) $0,2\pi$ C) $0,3\pi$ D) $0,4\pi$ E) $0,5\pi$

- 18 Do prázdných nádob rozlijeme 255,75 litrů vody. Vodu budeme rozlívát čtvrtlitrovými hrnkami. Do první nádoby nalijeme jeden plný hrnek vody, do druhé nádoby dva plné hrnky, do třetí nádoby čtyři plné hrnky atd., do každé další nádoby nalijeme vždy dvakrát větší počet plných hrnků vody. Vypočtete, kolik litrů vody bude v poslední nádobě.



1. nádoba

2. nádoba

3. nádoba

poslední nádoba

- 19 Cena automobilu se jeho opotřebením každoročně snižuje o 12 % z ceny v předchozím roce.

- 19.1 Určete, o kolik procent původní ceny klesla cena automobilu za 7 let. Výsledek zaokrouhlete na celá procenta.
- 19.2 Vypočtete, po kolika celých letech poprvé klesne cena automobilu na méně než 25 % původní ceny.

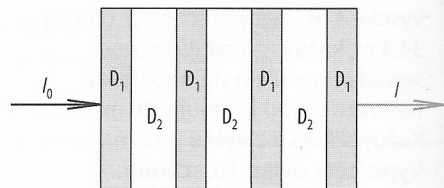
- 20 Průměrná hrubá mzda v České republice v 1. čtvrtletí roku 2017 byla 27 907 Kč, ve 4. čtvrtletí téhož roku byla 31 646 Kč (zdroj ČSÚ). Jaký byl v roce 2017 průměrný mezičtvrtletní procentuální přírůstek průměrné hrubé mzdy? Výsledek je zaokrouhlen na desetiny procenta.

- A) 4,2 % B) 4,3 % C) 4,4 % D) 4,5 % E) 4,6 %

- 21 Majitel stavební firmy přispíval každý rok na charitu. V prvním roce daroval 60 000 Kč, ve 2., 3. až 6. roce daroval vždy o 2 000 Kč více než v předchozím roce. V každém dalším roce pak zvyšoval přispívanou částku o 5 000 Kč. V posledním roce věnoval na charitativní účely 150 000 Kč. Vypočtete, kolik korun celkem přispěl za všechny roky.

- 22 Po průchodu deskou typu D_1 se intenzita světla zmenší o $\frac{1}{10}$ intenzity dopadajícího světla, po průchodu deskou typu D_2 se zmenší o $\frac{1}{9}$ intenzity dopadajícího světla.

Na kolik procent původní intenzity I_0 klesne intenzita I světla po průchodu čtyřmi deskami typu D_1 a třemi deskami typu D_2 ? Výsledek je zaokrouhlen na desetiny procenta.



- A) 26,7 % B) 46,1 % C) 53,9 % D) 73,3 % E) jiný počet procent

Dosažením souřadnic do předpisu funkce f_3 dostáváme:

$$y = 2^0 = 1 \neq 0 \Rightarrow P_1 \text{ není společný průsečík funkcí } f_1, f_2 \text{ a } f_3;$$

$$y = 2^2 = 4 = 4 \Rightarrow P_2 \text{ je společný průsečík funkcí } f_1, f_2 \text{ a } f_3.$$

$$21.2 \quad f_1(10) = 20; f_2(10) = 100; f_3(10) = 1024$$

$$22 \quad y = \frac{2x+4}{2x-1}$$

Předpis lineární lomené funkce f hledáme ve tvaru $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Na základě svislé asymptoty grafu funkce f určíme, že jmenovatel zlomku v předpisu funkce f musí být nenulový násobek výrazu $x - \frac{1}{2}$.

Na základě vodorovné asymptoty grafu funkce f určíme, že podíl $\frac{a}{c} = 1$. Dosažením souřadnic bodu $[-2; 0]$, který leží na grafu

funkce f , určíme, že číselník zlomku v předpisu funkce f musí být nenulový násobek výrazu $x + 2$. Čitatele i jmenovatele zlomku v předpisu funkce f následně násobíme číslem 2.

$$23 \quad 23.1 \quad D(f) = (-1; +\infty)$$

Argument logaritmické funkce musí být kladný, tedy $x + 1 > 0$, tj. $x > -1$.

$$23.2 \quad f^{-1}: y = 4^x - 1$$

Inverzní funkcí k logaritmické funkci je funkce exponenciální.

V předpisu logaritmické funkce zaměníme proměnné x a y a vyjádříme y :

$$x = \log_4(y+1)$$

$$4^x = y+1$$

$$y = 4^x - 1$$

$$24 \quad x = \frac{3}{2}; y = 4$$

Předpis funkce f si upravíme:

$$y = \frac{8x-12+12-13}{2x-3}$$

$$y = \frac{4 \cdot (2x-3) + 12-13}{2x-3}$$

$$y = \frac{4 \cdot (2x-3)}{2x-3} + \frac{12-13}{2x-3}$$

$$y = 4 - \frac{1}{2x-3}$$

$$\text{Dostaneme tedy } y = -\frac{1}{2x-3} + 4, \text{ po úpravě } y = -\frac{1}{x-\frac{3}{2}} + 4.$$

Střed hyperboly má souřadnice $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

Asymptoty jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic a procházejí středem hyperboly.

Poznámka: Úpravu na středový tvar můžeme také provést dělením dvojčlenů $(8x-13)$ a $(2x-3)$ (v tomto pořadí).

5. Posloupnosti a finanční matematika (s. 31–35)

1 Dosažením $n = 1, n = 2, n = 3$ atd. do vzorce $a_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ určíme

několik prvních členů dané posloupnosti: $a_1 = -\frac{5}{2}, a_2 = \frac{5}{4}, a_3 = -\frac{5}{8}$ atd.

1.1 N

Některé členy posloupnosti jsou kladná čísla, např. a_2 .

1.2 A

Platí $a_1 = 4 \cdot a_3$.

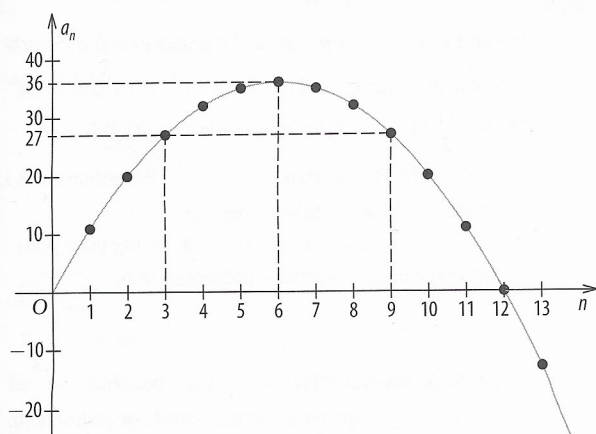
1.3 N

Protože $a_3 < a_2$, posloupnost není rostoucí.

1.4 A

$$\text{Pro } \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2} = q.$$

2 Při řešení úlohy lze využít graf dané posloupnosti:



Grafem posloupnosti jsou body $[n; a_n]$, $n \in \mathbb{N}$, které leží na parabole.

2.1 3. a 9. členem

Hledáme všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která $a_n = 27$. Kvadratická rovnice

$12n - n^2 = 27$ má v $\mathbb{N}$ právě dvě řešení $n_1 = 3, n_2 = 9$.

2.2 $n \geq 13, n \in \mathbb{N}$

Hledáme všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která $a_n < 0$. Řešením kvadratické

nerovnice $12n - n^2 < 0$ v $\mathbb{N}$ jsou právě všechna $n > 12, n \in \mathbb{N}$.

2.3 $a_6 = 36$

Funkce $a_n = 12n - n^2$, $n \in \mathbb{N}$, nabývá maxima pro $n = 6$ ($a_6 = 36$).

2.4 $n = 11; n = 12$

Pro všechna $n \leq 12, n \in \mathbb{N}$, je $a_n \geq 0$ a pro všechna $n > 12, n \in \mathbb{N}$, je $a_n < 0$. Protože $a_{12} = 0$, nabývá součet $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ maxima pro $n = 11$ nebo $n = 12$. Úloha má právě dvě řešení.

$$3 \quad 3.1 \quad a_n = (n+1)^2, n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = 2^2, a_2 = 3^2, a_3 = 4^2 \text{ atd., } a_n = (n+1)^2, n \in \mathbb{N}$$

$$3.2 \quad a_n - a_{n-1} = 2n+1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$a_n - a_{n-1} = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

3.3 21., 22. a 23. čtverec

Podle zadání úlohy je $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 1589$. Dostaneme

kvadratickou rovnici $(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 1589, n \in \mathbb{N}$.

Rovnice má v oboru $\mathbb{R}$ právě dva kořeny $n_1 = 21, n_2 = -25$,

v oboru $\mathbb{N}$ jediný kořen $n = 21$.

4 4.1 E

$$a_5 = a_7 - 2d = 6$$

4.2 B

Nejdříve určíme diferenci aritmetické posloupnosti a pak její 5. člen:

$$d = a_4 - a_3 = \frac{1}{4}, a_5 = a_1 + 4d = 0$$

4.3 C

Vypočteme kvocient geometrické posloupnosti:

$$\frac{a_6}{a_3} = -\frac{1}{27}$$

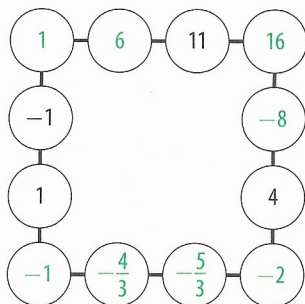
$$\frac{a_3 q^3}{a_3} = -\frac{1}{27}$$

$$q^3 = -\frac{1}{27}$$

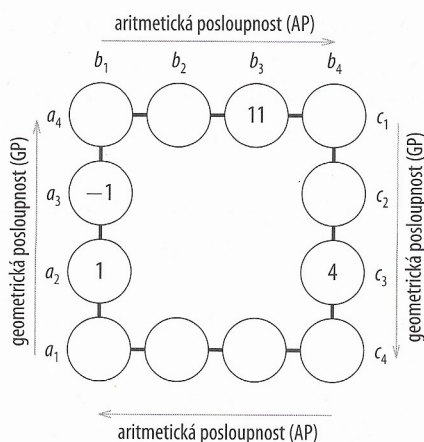
$$q = -\frac{1}{3}$$

Určíme 5. člen $a_5 = a_4 q = 1$.

5



Označíme a_1, a_2, a_3, a_4 členy geometrické posloupnosti vepsané do políček v levé svislé straně čtverce ve směru vyznačeném šipkou.



$$\text{Platí } a_2 = 1, a_3 = -1, q = \frac{a_3}{a_2} = -1.$$

$$\text{Dopočteme } a_1 = \frac{a_2}{q} = -1, a_4 = a_3 q = 1.$$

Označíme b_1, b_2, b_3, b_4 členy aritmetické posloupnosti vepsané do políček v horní vodorovné straně čtverce ve směru vyznačeném šipkou (viz obr.). Platí $b_1 = a_4 = 1, b_3 = 11, b_3 = b_1 + 2d$.

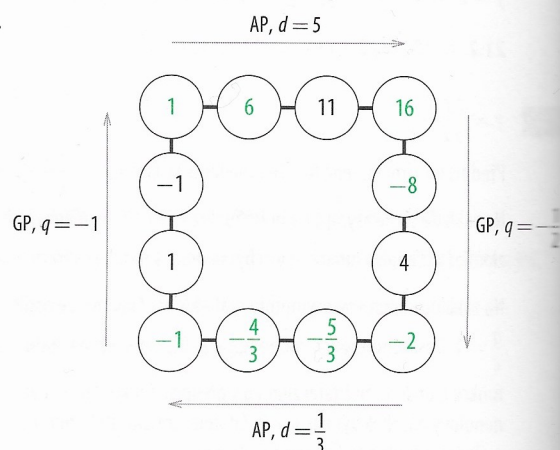
$$\text{Dopočteme } d = \frac{b_3 - b_1}{2} = 5, b_2 = b_1 + d = 6, b_4 = b_3 + d = 16.$$

Podobně dopočteme čísla zapsaná do políček v pravé svislé a v dolní vodorovné straně čtverce.

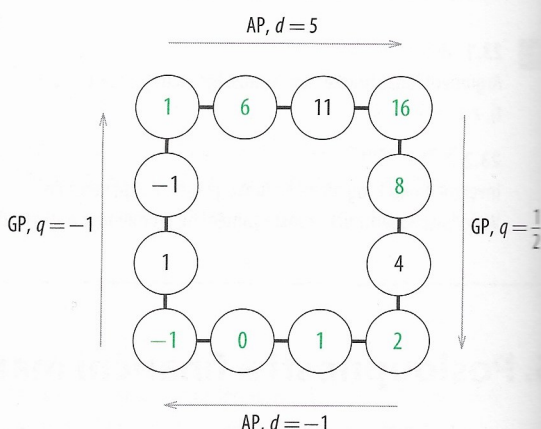
Označíme-li c_1, c_2, c_3, c_4 členy geometrické posloupnosti vepsané do políček v pravé svislé straně čtverce ve směru vyznačeném šipkou (viz obr.), dostaneme $q^2 = \frac{c_3}{c_1} = \frac{1}{4}$. Do políček v pravé svislé straně

lze tedy zapsat dvě geometrické posloupnosti ($q = -\frac{1}{2}$ nebo $q = \frac{1}{2}$) a je třeba uvážit dvě řešení:

1.



2.



Druhé řešení nevyhovuje požadavku na počet kladných a záporných čísel.

6 E

A) Ze zadání plyne $a_1 = s_1 = 15, a_2 = s_2 - s_1 = 5$.

Pro diferenci dostáváme $d = a_2 - a_1 = -10$. Tvrzení je pravdivé.

B) Platí $a_5 = a_4 + d$. Protože je $d < 0$, je $a_5 < a_4$. Tvrzení je pravdivé.

C) Vypočteme $a_3 = a_2 + d = 5 - 10 = -5$ a určíme $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 15 + 5 - 5 = 15$. Dostaneme $s_3 = s_1$. Tvrzení je pravdivé.

D) Vypočteme $a_4 = a_3 + d = -5 - 10 = -15$ a určíme $s_4 = s_3 + a_4 = 15 - 15 = 0$. Tvrzení je pravdivé.

E) Vypočteme $a_5 = a_4 + d = -15 + (-10) = -25$ a určíme $s_5 = s_4 + a_5 = -25$. Dostaneme $s_5 < s_4$. Tvrzení je nepravdivé.

7

7.1 $a_n = 3, 1n - 2, 1; n \in \mathbb{N}$

Do vzorce $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti dosadíme $n = 11, a_1 = 1$ a $s_{11} = 181,5$. Dostaneme $181,5 = \frac{11}{2} \cdot (1 + a_{11})$. Řešením rovnice je $a_{11} = 32$. Dále platí $a_{11} = a_1 + 10d$. Po dosazení $a_1 = 1, a_{11} = 32$ dostaneme $d = 3,1$. Vyjádříme n -tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -2,1 + 3,1n, n \in \mathbb{N}$. Existuje právě jedna aritmetická posloupnost vyhovující podmínkám úlohy.

7.2 $g_{n_1} = (\sqrt{2})^{n-1}, n \in \mathbb{N}; g_{n_2} = (-1)^{n-1} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

V geometrické posloupnosti platí $g_{11} = g_1 q^{10}$. Dosadíme $g_1 = 1, g_{11} = 32$ a vypočteme kvocient geometrické posloupnosti:

$$32 = q^{10} \Leftrightarrow |q| = \sqrt[10]{32} \Leftrightarrow q_1 = \sqrt{2}, q_2 = -\sqrt{2}$$

Podmínkám úlohy vyhovují právě dvě geometrické posloupnosti.

Vyjádříme je vzorcem pro n -tý člen:

$$g_{n_1} = g_1 q_1^{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1}, n \in \mathbb{N};$$

$$g_{n_2} = g_1 q_2^{n-1} = (-\sqrt{2})^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Jiný způsob zápisu:

$$g_{n_1} = 2^{\frac{n-1}{2}}, n \in \mathbb{N}; g_{n_2} = (-1)^{n-1} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}, n \in \mathbb{N}$$

8 $x = 3$

Rovnici upravíme:

$$x = \frac{1\,001 + 1\,003 + 1\,005 + \dots + 1\,995 + 1\,997 + 1\,999}{1 + 3 + 5 + \dots + 995 + 997 + 999}$$

V čitateli i ve jmenovateli zlomku je součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (počet členů obou posloupností je stejný).

$$x = \frac{\frac{n}{2} \cdot (1\,001 + 1\,999)}{\frac{n}{2} \cdot (1 + 999)} \Leftrightarrow x = 3$$

9 B

Všechna trojčíselná přirozená čísla menší než 450 jsou po sobě jdoucí členy konečné aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 1$. Jejich součet určíme použitím vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti:

$$100 + 101 + 102 + \dots + 447 + 448 + 449 = \frac{350}{2} \cdot (100 + 449) = 96\,075$$

Všechna trojčíselná přirozená čísla, která jsou menší než 450 a zároveň dělitelná šesti, jsou po sobě jdoucí členy konečné aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 6$. Nejdříve určíme počet těchto čísel a pak vypočteme jejich součet: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, $444 = 102 + (n-1) \cdot 6$, $n = 58$;

$$102 + 108 + 114 + \dots + 432 + 438 + 444 = \frac{58}{2} \cdot (102 + 444) = 15\,834.$$

Dopočteme součet všech trojčíselných přirozených čísel, která jsou menší než 450 a zároveň nejsou dělitelná šesti: $96\,075 - 15\,834 = 80\,241$.

10 2,4 cm; 6 cm; 15 cm

$$V = 216 \text{ cm}^3, S_{\max} = 90 \text{ cm}^2$$

Pro délky a, b, c (v cm) hran kváдру platí: $a = a_1 = \frac{a_2}{q}$, $b = a_2$,

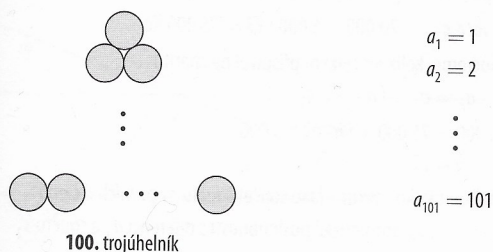
$c = a_3 = a_2 q$. Za předpokladu, že $q > 1$, je $S_{\max} = bc$.

$$\begin{aligned} V &= abc & S_{\max} &= bc \\ V &= \frac{a_2}{q} \cdot a_2 a_2 q & S_{\max} &= a_2 a_2 q \\ a_2 &= \sqrt[3]{V} & q &= \frac{S_{\max}}{a_2^2} \\ a_2 &= \sqrt[3]{216} & q &= \frac{90}{6^2} \\ a_2 &= 6 & q &= 2,5 \end{aligned}$$

Délky hran kváдру jsou $a = 2,4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 15$ cm.

11 C

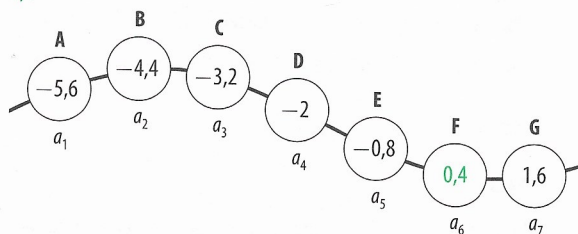
Počty mincí v jednotlivých řadách trojúhelníku jsou po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 1$.



Počet všech mincí ve 100. trojúhelníku je roven součtu členů

$$a_1, a_2, \dots, a_{101} \text{ posloupnosti: } s_{101} = \frac{101}{2} \cdot (1 + 101) = 5\,151$$

12 0,4



Z 3. podmínky plyne, že čísla zapsaná v políčkách A–G jsou po sobě jdoucí členy konečné aritmetické posloupnosti. Číslo zapsané v políčku A je prvním členem a_1 posloupnosti, číslo v políčku B druhým členem a_2 posloupnosti atd.

$$\begin{aligned} \text{Platí: } a_4 &= -2 \\ a_2 + a_7 &= -2,8 \end{aligned}$$

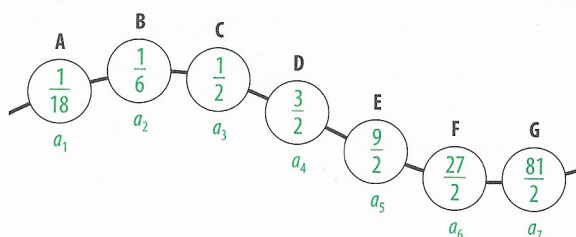
Určíme diferencí d a dopočteme a_6 .

$$\begin{aligned} a_4 &= -2 \\ a_4 - 2d + a_4 + 3d &= -2,8 \\ d &= 1,2 \end{aligned}$$

$$a_6 = a_4 + 2d = 0,4$$

V políčku F je vepsané číslo 0,4.

13



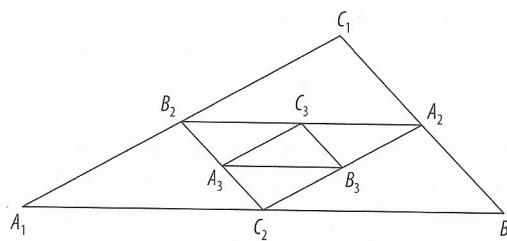
Z 3. podmínky plyne, že čísla zapsaná v políčkách A–G jsou po sobě jdoucí členy konečné geometrické posloupnosti. Číslo zapsané v políčku A je prvním členem a_1 posloupnosti, číslo v políčku B druhým členem a_2 posloupnosti atd.

$$\text{Podle zadání platí } a_3 = \frac{1}{2}, a_3 a_4 = \frac{3}{4}. \text{ Dostáváme tedy } a_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.$$

Určíme kvocient geometrické posloupnosti $q = \frac{a_4}{a_3} = 3$. Pomocí vzorce

$$a_s = a_r q^{s-r}, \text{ kde } r, s \in \mathbb{N}, \text{ vypočteme zbývající členy posloupnosti.}$$

14



Strany trojúhelníku $A_2B_2C_2$ jsou střední příčky trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

Trojúhelník $A_2B_2C_2$ je podobný trojúhelníku $A_1B_1C_1$ s koeficientem

podobnosti $k = \frac{1}{2}$. Obdobně trojúhelník $A_3B_3C_3$ je podobný

trojúhelníku $A_2B_2C_2$ s koeficientem podobnosti $k = \frac{1}{2}$ atd.

14.1 A

Délky (v cm) odpovídajících si stran podobných trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... jsou po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti

s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Délka a_1 nejkratší strany trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je 1. členem, délka a_3 nejkratší strany trojúhelníku $A_3B_3C_3$ je 3. členem

posloupnosti. Platí $a_3 = a_1 q^2 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$.

14.2 A

Obvody (v cm) $a_1, a_2, a_3, \dots$ trojúhelníků $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ jsou po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Platí } a_5 = a_1 q^4 = 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4,5.$$

14.3 A

Do vzorce $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pro součet prvních n členů geometrické

posloupnosti dosadíme $n = 7, a_1 = 72, q = \frac{1}{2}$.

14.4 N

Obsahy (v cm^2) $S_1, S_2, S_3, \dots$ trojúhelníků $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ jsou po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \frac{1}{4}$.

Platí:

$$S_{12} = S_8 q^4$$

$$S_{12} = S_8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$S_8 = 256 \cdot S_{12}$$

15 29 m

Určíme počet schodů $n = \frac{4}{0,16} = 25$. Délky schodů (v m) jsou

po sobě jdoucí členy $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ aritmetické posloupnosti,

$$a_1 = 34,4; a_{25} = 20.$$

Vypočteme diferenci d posloupnosti:

$$a_{25} = a_1 + 24d$$

$$20 = 34,4 + 24d$$

$$d = -0,6$$

Délka 10. schodu (v m) je 10. člen posloupnosti:

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$a_{10} = 34,4 - 9 \cdot 0,6 = 29$$

16 16.1 $3n^2 + 3n$

Počty zápalek potřebných na vytvoření jednotlivých domečků jsou po sobě jdoucí členy $a_1, a_2, \dots, a_n$ aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $a_1 = 6, d = 6$. Vyjádříme n -tý člen posloupnosti:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 6 + (n-1) \cdot 6 = 6n$$

Celkový počet zápalek potřebných na vytvoření n domečků je roven součtu prvních n členů posloupnosti:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (6 + 6n) = 3n \cdot (n+1) = 3n^2 + 3n$$

16.2 40 domečků

Sestavíme rovnici $3n^2 + 3n = 4\,920, n \in \mathbb{N}$. Kvadratická rovnice má v oboru $\mathbb{R}$ právě dva kořeny $n_1 = 40, n_2 = -41$, v oboru $\mathbb{N}$ jediný kořen $n = 40$.

17 B

Objemy vody (v cm^3) v 1., 2. až 10. nádobě tvoří 10 po sobě jdoucích členů $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ konečné aritmetické posloupnosti s diferencí d :

$$d = \pi r^2 v = (\pi \cdot 5^2 \cdot 4) \text{ cm}^3 = 100\pi \text{ cm}^3, s_{10} = 6,5\pi \text{ l} = 6\,500\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Dále platí } s_{10} = \frac{10}{2} \cdot (a_1 + a_{10}), a_{10} = a_1 + 9d.$$

$$\text{Dosadíme } d = 100\pi \text{ cm}^3, s_{10} = 6\,500\pi \text{ cm}^3:$$

$$6\,500\pi = \frac{10}{2} \cdot (a_1 + a_{10}), a_{10} = a_1 + 9 \cdot 100\pi$$

$$\text{Řešením soustavy rovnic dostaneme } a_1 = 200\pi \text{ cm}^3.$$

$$\text{V 1. nádobě bude } 200\pi \text{ cm}^3 = 0,2\pi \text{ l vody.}$$

18 128 l vody

Do n nádob rozlijeme 255,75 litrů, tj. 1 023 čtvrtlitrových hrnků vody. Počty hrnků vody, kterou nalijeme do jednotlivých nádob, jsou po sobě jdoucí členy $a_1, a_2, \dots, a_n$ konečné geometrické posloupnosti, ve které platí $a_1 = 1, q = 2, s_n = 1\,023$. Určíme poslední, n -tý člen a_n posloupnosti:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$1\,023 = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow n = 10$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2^9 \text{ hrnků, tj. 128 l vody}$$

19 19.1 o 59 %

Původní cena automobilu a_0 a ceny $a_1, a_2, \dots, a_7$ automobilu na konci jednotlivých let jsou po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 0,88$. Cena automobilu po 7 letech:

$$a_7 = a_0 q^7$$

$$a_7 = a_0 \cdot 0,88^7 \approx 0,41a_0$$

Cena automobilu po 7 letech klesla na 41 % původní ceny, tj. o 59 % původní ceny.

19.2 po 11 letech

Vypočteme, po kolika n letech klesne cena automobilu na hodnotu $0,25a_0$.

$$a_n = a_0 q^n$$

$$0,25a_0 = a_0 \cdot 0,88^n$$

$$0,25 = 0,88^n$$

$$n = \frac{\log 0,25}{\log 0,88}$$

$$n \approx 10,8$$

Na hodnotu menší než $0,25a_0$ klesne cena automobilu poprvé po 11 celých letech.

20 B

Označme p průměrný mezičtvrtletní procentuální přírůstek průměrné hrubé mzdy v %, a_1 průměrnou hrubou mzdou (v Kč) v 1. čtvrtletí, a_4 průměrnou hrubou mzdou (v Kč) ve 4. čtvrtletí. Průměrné hrubé mzdy a_1, a_2, a_3, a_4 (v Kč) v jednotlivých čtvrtletích jsou po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, $a_1 = 27\,907, a_4 = 31\,646$.

Platí: $a_4 = a_1 q^3$, kde $q = 1 + \frac{p}{100}$. Dostaneme:

$$31\,646 = 27\,907 q^3$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{31\,646}{27\,907}}$$

$$q \approx 1,043, \text{ tj. } p \approx 4,3 \%$$

21 2 190 000 Kč

Příspěvky (v Kč) na charitu v 1. až 6. roce jsou po sobě jdoucí členy $a_1, a_2, \dots, a_6$ aritmetické posloupnosti s diferencí $d_1 = 2\,000$ Kč, příspěvky v dalších letech jsou po sobě jdoucí členy $a_7, a_8, \dots, a_n$ aritmetické posloupnosti s diferencí $d_2 = 5\,000$ Kč. V 6. roce majitel firmy přispěl částku $a_6 = a_1 + 5d_1 = (60\,000 + 5 \cdot 2\,000)$ Kč = 70 000 Kč, v 7. roce $a_7 = (70\,000 + 5\,000)$ Kč = 75 000 Kč.

Vypočteme, kolik let celkem přispíval na charitu:

$$a_n = a_7 + (n-7) \cdot d_2$$

$$150\,000 = 75\,000 + (n-7) \cdot 5\,000$$

$$n = 22$$

Celkovou částku s určíme jako součet součtu s_1 prvních 6 členů $a_1, a_2, \dots, a_6$ aritmetické posloupnosti s diferencí d_1 a součtu s_2 16 členů $a_7, a_8, \dots, a_{22}$ aritmetické posloupnosti s diferencí d_2 :

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = \frac{6}{2} \cdot (a_1 + a_6) + \frac{16}{2} \cdot (a_7 + a_{22})$$

$$s = \left[\frac{6}{2} \cdot (60\,000 + 70\,000) + \frac{16}{2} \cdot (75\,000 + 150\,000) \right] \text{ Kč} = 2\,190\,000 \text{ Kč}$$

22 B

Po průchodu čtyřmi deskami typu D_1 a třemi deskami typu D_2 klesne intenzita I světla na hodnotu $I = I_0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \doteq 0,461 I_0$, tj. 46,1 % I_0 .

23

Částku K_m , kterou nám banka vyplatí po 4 letech v den splatnosti vkladu, vypočteme podle vzorce $K_m = K_0 \cdot (1 + ki_j)^m$, kde m je počet úrokovacích období, K_0 vložená částka, k zdaňovací koeficient, j počet úrokovacích období za 1 rok, i_j úroková míra za dané úrokovací období vyjádřená desetinným číslem.

23.1 F

$$m = 4, K_0 = 100\,000 \text{ Kč}, k = 0,85, i_1 = 0,02 \text{ p. a.}$$

$$K_4 = 100\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,02)^4 \text{ Kč} \doteq 106\,975 \text{ Kč}$$

23.2 C

$$m = 16, K_0 = 100\,000 \text{ Kč}, k = 0,85, i_4 = 0,004 \text{ p. q.}$$

$$K_{16} = 100\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,004)^{16} \text{ Kč} \doteq 105\,581 \text{ Kč}$$

23.3 A

$$m = 48, K_0 = 100\,000 \text{ Kč}, k = 0,85, i_{12} = \frac{0,015}{12} = 0,00125 \text{ p. m.}$$

$$K_{48} = 100\,000 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,015}{12}\right)^{48} \text{ Kč} \doteq 105\,229 \text{ Kč}$$

23.4 E

$$m = 4, m_1 = 2, m_2 = 2, K_0 = 100\,000 \text{ Kč}, k = 0,85, i_1 = 0,018 \text{ p. a.}, i_{12} = 0,021 \text{ p. a.}$$

$$K_m = K_0 \cdot (1 + ki_{11})^{m_1} \cdot (1 + ki_{12})^{m_2}$$

$$K_4 = 100\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,018)^2 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,021)^2 \text{ Kč} \doteq 106\,796 \text{ Kč}$$

24 C

Jedná se o dlouhodobé spoření, peněžní částka se ukládá počátkem každého úrokovacího období (předhlátní úlohy). Celkovou uspořeno

částku vypočteme podle vzorce $S_m = aq \frac{q^m - 1}{q - 1}$, kde $q = 1 + k \cdot \frac{i}{j}$,

m je celkový počet úrokovacích období, a je pravidelně ukládaná částka, k zdaňovací koeficient, i roční úroková míra vyjádřená desetinným číslem, j počet úrokovacích období za 1 rok. Dosadíme $m = 60, a = 1\,000 \text{ Kč}, k = 0,85, i = 0,04, j = 12$:

$$S_{60} = 1\,000 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,04}{12}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,04}{12}\right)^{60} - 1}{\left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,04}{12}\right) - 1} \text{ Kč} \doteq 65\,500 \text{ Kč}$$

25 A

Ze vzorce $K_3 = K_0 \cdot (1 + i)^3$, kde K_0 je výše poskytnutého úvěru, K_3 jednorázová splátka dluhu po třech letech, i roční úroková míra vyjádřená desetinným číslem, vyjádříme K_0 :

$$K_0 = \frac{K_3}{(1 + i)^3}$$

Dosadíme $K_3 = 1\,481\,760 \text{ Kč}, i = 0,05$:

$$K_0 = \frac{1\,481\,760}{1,05^3} \text{ Kč} \doteq 1\,280\,000 \text{ Kč}$$

26

26.1 456 720 Kč

26.2 ve 2. roce

26.3 356 720 Kč

Na konci každého roku banka připsá úrok ve výši 10 % z aktuální dlužné částky a poté bude dlužná částka snížena o roční splátku. Doplníme tabulku.

	Připsaný úrok z dluhu	Výše splátky	Stav dluhu
Počáteční stav	0 Kč	0 Kč	1 200 000 Kč
Konec 1. roku	120 000 Kč	200 000 Kč	1 120 000 Kč
Konec 2. roku	112 000 Kč	400 000 Kč	832 000 Kč
Konec 3. roku	83 200 Kč	500 000 Kč	415 200 Kč
Konec 4. roku	41 520 Kč	456 720 Kč	0 Kč

27

27.1 474 793 Kč

Výši s jedné splátky vypočteme ze vzorce $s = Dq^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$,

kde $q = 1 + i$, D je počáteční výše dluhu, n počet úrokovacích období (počet splátek), i roční úroková míra vyjádřená desetinným číslem.

Dosadíme $D = 2\,000\,000 \text{ Kč}, n = 5, i = 0,06$:

$$s = 2\,000\,000 \cdot 1,06^5 \cdot \frac{1,06 - 1}{1,06^5 - 1} \text{ Kč} \doteq 474\,793 \text{ Kč}$$

27.2 118,7 %

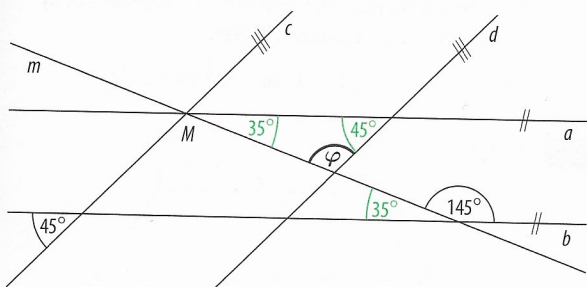
Podnikatel zaplatí celkem $5 \cdot 474\,793 \text{ Kč} = 2\,373\,965 \text{ Kč}$,

tj. $\frac{2\,373\,965}{2\,000\,000} \cdot 100 \% \doteq 118,7 \%$ vypůjčené částky.

6. Planimetrie (s. 36–41)

1

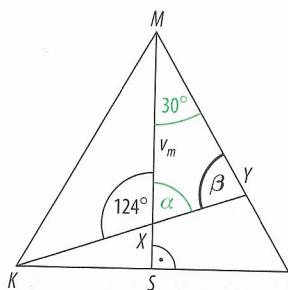
100°



Využijeme vlastnosti úhlů souhlasných, vedlejších a střídavých. Velikost úhlu φ dopočteme z vlastností součtu vnitřních úhlů trojúhelníku, platí: $\varphi = 180^\circ - (35^\circ + 45^\circ) = 100^\circ$

2

94°



V rovnostranném trojúhelníku KLM má úhel KMY velikost 30° . Úhel α je vedlejší k úhlu o velikosti 124° , proto $\alpha = 56^\circ$. Z trojúhelníku XYM dopočteme $\angle MYK = \beta = 180^\circ - (56^\circ + 30^\circ) = 94^\circ$.