

2. Algebraické výrazy

Klíč na s. 105–107

Níže uvedený seznam obsahuje požadavky na konkrétní vědomosti a dovednosti z tematického okruhu Algebraické výrazy, které mohou být ověřovány v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky.

Žák dovede:

2.1 Algebraické výrazy

- určit hodnotu výrazu;
- určit nulový bod výrazu;
- určit definiční obor výrazu;
- sestavit výraz, interpretovat výraz;
- modelovat reálné situace užitím výrazů.

2.2 Mnohočleny

- užití pojmy člen, koeficient, stupeň mnohočlenu;
- provádět operace s mnohočleny, provádět umocnění dvojčlenu pomocí vzorců;
- rozložit mnohočlen na součin vytýkáním a užitím vzorců.

2.3 Lomené výrazy

- provádět operace s lomenými výrazy;
- určit definiční obor lomeného výrazu.

2.4 Výrazy s mocninami a odmocninami

- provádět operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny;
- určit definiční obor výrazu s mocninami a odmocninami.

(Zdroj: <http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/katalogy-pozadavku-zkousek-spolecne-casti-maturitni-zkousky-1>; upraveno)

Více informací potřebných k řešení úloh v rámci tematického celku Algebraické výrazy najdete v těchto publikacích nakladatelství Didaktis:

- Odmaturuj z matematiky 1 (kapitoly 6–8)
- Odmaturuj z matematiky 3 (kapitoly 6–8)
- Matematika pro střední školy – 2. díl: Výrazy, rovnice, nerovnice

1 Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je dán výraz $V(x) = x - 2 + (4x^2 - 1) \cdot (x - 2)$.

1.1 Určete, pro která x nabývá výraz hodnotu 0.

1.2 Určete hodnotu výrazu pro $x = -\frac{1}{2}$.

2 Pokud odečteme od dvojnásobku mnohočlenu $P(x) = x^4 - 3x^2 + 0,2x$ neznámý mnohočlen $N(x)$, získáme mnohočlen $Q(x) = x^4 + x^3 - 1,6x - 1$.

2.1 Určete stupeň mnohočlenu $N(x)$.

2.2 Určete součet koeficientů všech členů mnohočlenu $N(x)$.

3 Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je dán výraz $V(x) = x^{-2} + x^{-3} + \frac{1}{x}$.

Určete hodnotu výrazu pro $x = 10^2$ a výsledek zapište desítným číslem.

4 Jsou dány výrazy $A(x) = \frac{x}{12} : (3 : 4)$; $B(x) = (2 : 4) : \frac{3}{4x}$ s reálnou proměnnou x .

Který z následujících výrazů je pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekvivalentní s výrazem $A(x) + \frac{1}{2} \cdot B(x)$?

- A) $\frac{19}{48}x$ B) $\frac{4}{9}x$ C) $\frac{7}{9}x$ D) $\frac{13}{9}x$ E) jiný výraz

5 Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ určete zbytek po dělení mnohočlenu $(x^3 - 2x^2 - 2x + 4)$ mnohočlenem $(x^2 - 1)$.

- 6 Pro $m \in \mathbb{R}$ určete součin výrazu $(2m + \sqrt{2})$ a výrazu k němu opačného. Výsledek запиšte ve tvaru trojčlenu.

- 7 Vytýkáním nebo užitím vzorců rozložte na součin:

7.1 $4a^2 - (a - 2)^2$
 7.2 $-2a^2 + 20a - 50$
 7.3 $ab - b - a + a^2$

- 8 Přiřaďte ke každému výrazu (8.1–8.4) s reálnou proměnou x jeho definiční obor (A–F).

8.1 $\frac{4x}{x-3} \cdot \frac{3-x}{4 \cdot (x+3)^2}$	☐	A) $(-\infty; -3)$
8.2 $\sqrt{2x-6}$	☐	B) $(-\infty; -3)$
8.3 $\sqrt{\frac{x^2+3}{3-x}}$	☐	C) $(-\infty; 3)$
8.4 $\frac{x}{\sqrt{9+3x}}$	☐	D) $(-3; +\infty)$
		E) $\langle 3; +\infty)$
		F) jiná množina

- 9 Pro všechna $u \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}$ zjednodušte výraz:

$$\left(4u + \frac{2u}{u-1}\right) \cdot \frac{u-1}{4 \cdot u \cdot u-1}$$

- 10 Doplňte do rámečku takový člen, aby platila rovnost:

$$(4x+3) \cdot (4x-2) = (4x+1)^2 - \quad - 7$$

- 11 Pro všechna $a \in (0; +\infty)$ zjednodušte výraz:

$$\frac{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} + 4 \cdot \sqrt{a^3}$$

- 12 Pro všechna kladná reálná x přiřaďte ke každému výrazu (12.1–12.3) odpovídající hodnotu exponentu (A–E) proměnné x po úpravě tohoto výrazu.

12.1 $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$	☐				
12.2 $x^2 : (\sqrt{x})^{-1}$	☐				
12.3 $x^2 \cdot \frac{1}{1 : x^{-0,5}}$	☐	A) $\frac{2}{3}$	B) $\frac{3}{4}$	C) $\frac{4}{3}$	D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

- 13 Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}$ zjednodušte výraz na tvar bez odmocniny:

13.1 $\sqrt{\frac{(2 \cdot \sqrt{2})^2 \cdot n^8}{2n^2}}$
 13.2 $\sqrt{9 \cdot 4^2 \cdot y^{16} + 25 \cdot (y^4)^4}$

- 14 Jeden stroj vyrobí k součástek za m minut.
- 14.1 V závislosti na veličinách k, m vyjádřete počet součástek zhotovených třemi stejně výkonnými stroji za 2 hodiny.
- 14.2 V závislosti na veličinách k, m určete, za kolik hodin by jeden stroj vyrobil 360 k součástek.

15 Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$ platí $\frac{x-1}{x-5} = \frac{V(x)}{25-x^2}$.

Který z následujících výrazů je ekvivalentní s výrazem $V(x)$?

- A) $-x^2 - 4x - 5$ B) $-x^2 - 4x + 5$ C) $-x^2 + 4x - 5$ D) $x^2 + 4x - 5$ E) $x^2 - 4x + 5$

- 16 Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ zjednodušte výraz:

$$(x^{-2} - 2x^{-1} + x^0) : (x-1)^2$$

- 17 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (17.1–17.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

17.1 Všechny nulové body výrazu $\frac{x^3 + 4x^2}{x+2}$ jsou záporná čísla.

17.2 Hodnota výrazu $(x^2 - 1)^{-1}$ je pro $x = \frac{1}{10}$ větší než číslo (-1) .

17.3 Výraz $\frac{(x-4) \cdot (x+1)}{x^2 + x}$ nabývá nulové hodnoty pouze pro $x = 4$.

17.4 Číslo 4 není nulovým bodem výrazu $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$.

A	N
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐

- 18 Na koncert se prodalo 200 vstupenek k sezení a 50 vstupenek ke stání. Polovina vstupenek k sezení stála 400 Kč za kus, n vstupenek k sezení bylo po 300 Kč za kus a zbylé vstupenky k sezení se prodávaly za 200 Kč za kus. Cena jedné vstupenky ke stání byla 100 Kč.

Který z následujících výrazů určuje průměrnou cenu v Kč jedné prodané vstupenky na koncert?

- A) $0,4n + 240$ B) $0,4n + 260$ C) $0,4n + 340$ D) $0,5n + 260$ E) $0,5n + 325$

- 19 Pro všechna $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je dán výraz $\{(a \cdot b^{-3})^3 \cdot a^2 : [a^{-2} \cdot b^2 \cdot (b^{-1})^2]^2\}$.
Výraz zjednodušte a výsledek запиšte ve tvaru $a^n \cdot b^m$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$.

20 Je dán výraz $\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$ s reálnou proměnnou x .

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (20.1–20.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

20.1 Daný výraz je definován pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

20.2 Daný výraz lze zjednodušit na tvar $\frac{x-1}{x}$.

20.3 Daný výraz má právě jeden nulový bod.

20.4 Daný výraz má pro $x = 2$ hodnotu $\frac{3}{2}$.

A	N
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐

- 21 Určete všechny hodnoty $c \in \mathbb{R}$, pro které má smysl výraz:

$$\frac{\frac{c+4}{c+16} + 2}{\frac{c-5}{5c}}$$

- 22 Který z následujících výrazů je ekvivalentní s trojnásobkem druhé mocniny rozdílu výrazu $\frac{3}{2}t$ a výrazu $\left(-\frac{1}{3}t\right)$ (v tomto pořadí)?

A) $\frac{49}{12}t^2$ B) $\frac{77}{12}t^2$ C) $\frac{85}{12}t^2$ D) $\frac{121}{12}t^2$ E) jiný výraz

- 23 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (23.1–23.4), zda je pro všechny hodnoty $x, y \in \mathbb{N}$ pravdivé (A), či nikoli (N).

	A	N
23.1 $10^{\frac{x}{y}} = 10^x \cdot 10^{-y}$	☐	☐
23.2 $4^{2-x} = -4^x \cdot 16$	☐	☐
23.3 $\sqrt{1000^x} : \sqrt{10^x} = 10^x$	☐	☐
23.4 $3^{-x} \cdot 9^x = \frac{1}{3^{-x}}$	☐	☐

- 24 Pro všechna $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ je dán výraz $V(u) = (2u-1)^2 - 3 \cdot (u^3+1) : (u+1)$. Tento výraz upravte na tvar $V(u) = (u-a) \cdot (u-b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Do které dvouprvkové množiny náleží číslo a i číslo b ?

A) $\{-2; -1\}$ B) $\{-2; 1\}$ C) $\{-1; 2\}$ D) $\{1; 2\}$ E) do jiné dvouprvkové množiny

- 25 Která z následujících hodnot je hodnotou výrazu $\frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+2)^2}$ pro $x = \sqrt{2}$?

A) $3 - 4 \cdot \sqrt{2}$ B) $2 \cdot \sqrt{2} - 3$ C) $3 - 2 \cdot \sqrt{2}$ D) $\frac{7 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2})}{2}$ E) $3 + 2 \cdot \sqrt{2}$

- 26 Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ je dán výraz $V(x) = \left(\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1} - \frac{6}{x^2-1}\right) \cdot (x+1)$. Určete nulové body tohoto výrazu.

- 27 V Kocourkově bylo před pěti lety k koček a m myší. Během pěti let se počet koček nejprve ztrojnásobil a pak poklesl o jednu šestinu aktuálního počtu. Počet myší během téhož období nejprve poklesl o 25 % původního počtu a potom se zvýšil čtyřikrát. V závislosti na veličinách k, m vyjádřete celkový přírůstek počtu koček a myší v Kocourkově za těchto pět let.

- 28 Obchodník zakoupil dva stejné regály na zboží, které mají omezenou nosnost. Do jednoho regálu lze umístit maximálně n velkých konzerv (n je číslo dělitelné čtyřmi), nebo o polovinu více malých konzerv. První regál byl zaplněn polovinou dovoleného množství velkých konzerv. Druhý regál byl zaplněn dvěma třetinami dovoleného množství malých konzerv. Vyjádřete v závislosti na proměnné n maximální počet malých konzerv, které lze doplnit do obou regálů ke stávajícím konzervám tak, aby nebyla překročena stanovená nosnost.

- 29 Pro všechna celá čísla k přiřaďte ke každému výrazu (29.1–29.3) jeho ekvivalentní vyjádření (A–F).

29.1 $\frac{5 \cdot 3^{3k}}{3^k} - 2 \cdot 9^k$ ☐

29.2 $3^k \cdot (4 \cdot 3^k - 3^{k+1})$ ☐

29.3 $\left(\frac{3^k}{3}\right)^2 + 2 \cdot 3^{2k-2}$ ☐

A) 3^{2k-2}
B) 3^{2k-1}
C) 3^{2k}
D) 3^{2k+1}
E) 3^{2k+2}
F) 3^{k^2}