

Termodynamika živých systémů a fraktály

- Rovnovážná termodynamika
- Nerovnovážná termodynamika
- Lineární nerovnovážná termodynamika
- Stacionární stav, Prigoginův a Le Chatelierův princip
- Nerovnovážné systémy, bifurkace, „logistic map“
- Příklady bifurkací a chaotického chování v reálných živých systémech
- Nelineární nerovnovážná termodynamika
- Benárdova nestabilita
- Autokatalytické reakce, Bělousova-Žabotinského reakce
- Teorie kořisti a dravce, oscilace v populacích
- Fraktály – definice
- Příklady fraktálů
- Mandelbrotova množina
- Nerovnovážná termodynamika vs. fraktály

Termodynamika

- Termodynamika pojednává o vzájemných přeměnách různých druhů energie a o směřování fyzikálních a chemických pochodů. Zabývá se také studiem systémů tvořených mnoha složkami.
- Systém - libovolná část prostoru oddělená od svého okolí
- Energie - schopnost měnit daný stav systému (např. konat práci)
- Podle způsobu interakce systému s okolím rozlišujeme systémy:
 - izolované** - nevyměňují si s okolím hmotu ani energii
 - uzavřené** - vyměňují si s okolím jen energii, nikoli hmotu
 - otevřené** - vyměňují si s okolím hmotu i energii
- Termodynamika je založena na 2 typech veličin:
 - extenzivní veličiny** - charakterizují termodynamický systém jako celek (hmotnost, objem, celkový elektrický náboj)
 - intenzivní veličiny** - mají rozdílné hodnoty v jednotlivých bodech systému (koncentrace chemických komponent, teplota, elektrický potenciál)
- Studium vztahů mezi extenzivními a intenzivními veličinami tvoří základ pro formulaci termodynamických zákonů.

Zákony termodynamiky

- Základními termodynamickými zákony jsou zákon zachování hmoty (hmotnosti) a první, druhá, a třetí zákon termodynamiky.

1. zákon termodynamiky:

Celková energie izolovaného systému je při všech dějích stálá.

- Celková energie, kterou systém při libovolném ději vymění s okolím závisí jen na jeho počátečním a koncovém stavu, a nikoliv na cestě, které se toho dosáhlo. To znamená, že existuje energetická funkce, jejíž rozdíl mezi počátečním a koncovým stavem udává energii, kterou si systém vyměnil s okolím. Tato funkce se nazývá vnitřní energie systému (U).

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

Přírůstek vnitřní energie ΔU se rovná přijatému teplu ΔQ zmenšenému o vykonanou objemovou práci ΔW .

- Probíhá-li reakce za stálého objemu ($\Delta W = 0$), je reakční teplo ΔQ rovno ΔU systému. Když probíhá za stálého tlaku, reakční teplo dáno změnou enthalpie (ΔH) (definice entalpie: $H = U + pV$). Použití pro tepelnou bilanci reakcí.

Zákony termodynamiky

2. zákon termodynamiky: $dS \geq dQ/T$

- Počátkem 19. století se Carnot zabýval účinností tepelných strojů. Vytvořil koncept cyklicky pracujícího stroje, kde se objem ve válci s pístem měnil stykem s dvěma výměníky o různé teplotě. Úvahy o tomto konceptu ho vedly k teorému:

Všechny vratné stroje pracující mezi týmiž tepelnými zásobníky mají stejnou účinnost bez ohledu na pracovní náplň.

- Ze studia účinnosti tepelných strojů vyplynula existence nové stavové funkce, entropie S . Podle Carnotovy teorému je účinnost vratného stroje maximální. Stroj, který pracuje nevratně má tedy vždy menší účinnost, než stroj vratný.
- Jestliže si systém nevyměňuje s okolím teplo, dostáváme pro nevratný děj:
 $dS > 0$ a pro vratný děj $dS = 0$

Tedy entropie při nevratných dějích roste a v rovnováze, kdy mohou probíhat jen vratné děje, se nemění. Na entropii se můžeme dívat jako na míru samovolnosti, jelikož stoupá, probíhá-li v systému samovolný děj. Entropie také charakterizuje uspořádanost systému - se vzrůstem uspořádanosti systému jeho entropie klesá.

Zákony termodynamiky

3. zákon termodynamiky

- Formulace 3. zákona termodynamiky se časem vyvíjela. Za definitivní znění třetí věty se považuje Planckova formulace z roku 1912:

Entropie každé chemicky homogenní kondenzované fáze se blíží s klesající teplotou neomezeně nule.

Jiná formulace: *Konečným počtem operací nelze ochladit těleso na absolutní nulu.*

- Tedy z hlediska entropie a praktické životní situace si můžeme tři věty termodynamiky názorně přeformulovat takto ☺:

1. zákon: Nikdy nemůžeš vyhrát.
2. zákon: Maximálně můžeš dosáhnout remízy.
3. zákon: Mohl bys remizovat při absolutní nule, ta je ale nedosažitelná.

Nerovnovážná termodynamika (1)

- Rovnovážný stav je takový stav, do kterého systém dospěje, izolujeme-li ho od okolí a necháme ho dostatečně dlouhou dobu se vyvíjet, až se přestane měnit. Tento stav bude odpovídat nejpravděpodobnějšímu uspořádání, kdy je největší dezorganizovanost a entropie dosahuje maximální hodnoty.
- Živé systémy jsou ale systémy otevřené. V otevřeném biologickém systému jako celku nemůžeme očekávat termodynamickou rovnováhu, neboť systém v termodynamické rovnováze nemůže vykonávat práci. Schopnost vykonávat práci však biologické systémy potřebují k udržení životních funkcí. V otevřených systémech se ale může vytvořit jistý stacionární stav, ve kterém si parametry systému uchovávají konstantní hodnotu vyvážeností výměny látek a energií s okolím.
- Základní postulát termodynamiky nevratných procesů říká, že celková entropie otevřeného systému se může měnit buď na účet výměny entropie s externím prostředím ($d_e S$) nebo na účet nárůstu entropie v systému interními pochody:

$$dS = d_e S + d_i S$$

Nerovnovážná termodynamika (2)

- Pro rychlost změny entropie systému dostáváme:

$$dS/dt = d_e S/dt + d_i S/dt$$

kde člen $d_e S/dt$ odpovídající výměně entropie mezi systémem a okolím může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot, $d_i S/dt$ je pouze kladný.

Za stacionárního stavu je rychlost produkce entropie konstantní, tedy $dS/dt = 0$, a proto - $d_e S/dt = d_i S/dt$. **Za stacionárního stavu tedy platí, produkce entropie systému ($d_i S/dt$) se rovná rychlosti výstupu entropie ze systému.**

Snížení hodnoty celkové entropie živých organismů probíhá ($|d_e S/dt| < d_i S/dt$) na úkor toho, že ve vnějším prostředí se entropie zvyšuje.

Nerovnovážná termodynamika (3)

- Uvažujme otevřený systém, v němž se ustavila rovnováha za konstantní teploty a tlaku (často splněno pro živé systémy), tj. neprobíhají zde žádné nevratné pochody. V systému není ustavena rovnováha v rozložení látek schopných vzájemně chemicky reagovat. V takovém systému dochází k nárůstu entropie pouze v důsledku chemických reakcí. Co se týče výměny tepla mezi systémem a okolím, budeme předpokládat, že probíhá rovnovážnými (reverzibilními) pochody. Pro nárůst entropie v důsledku vnitřních dějů systému tak máme:

$$d_i S = dS - d_e S = dS - dQ_{\text{rev}}/T$$

- Předpokládejme, že pohlcování tepla naším systémem vede pouze k vykonávání mechanické objemové práce
- Dosazením do rovnice za dQ_{rev} z 1. zákona termodynamiky dostáváme:

- $$d_i S = dS - (dU + pdV)/T = 1/T (TdS - dU + pdV) = -dG/T \quad (24)$$

- Přírůstek entropie otevřeného systému v důsledku vnitřních nerovnovážných pochodů je úměrný snížení Gibbsovy funkce systému.

Nerovnovážná termodynamika (4)

- Pro rychlost změn platí:

$$d_i S/dt = -1/T (dG/dt)_{T,p} = 1/T \sum \mu_i (dn_i/dt)$$

protože $dG = \sum \mu_i dn_i$, kde μ_i je chemický potenciál a n_i je množství reagentu.

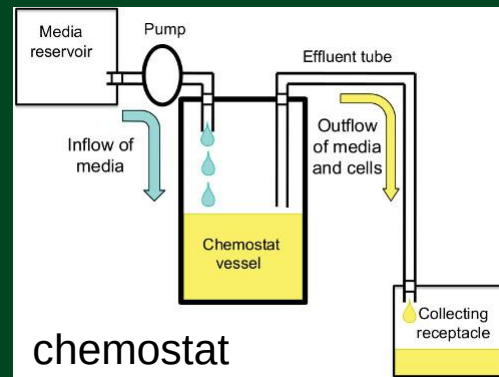
- To znamená, že rychlost produkce entropie v reagujících systémech za konstantní teploty a tlaku je úměrná rychlosti snižování jeho Gibbsovy funkce. Toto snižování G je závislé na rychlosti změny složení systému (dn_i/dt), tj. na rychlosti reakcí v něm probíhajících.
- Lineární nerovnovážná termodynamika

V lineární nerovnovážné termodynamice využíváme na základě principu lokální rovnováhy některé poznatky rovnovážné termodynamiky (systém můžeme nadále popisovat termodynamickými potenciály – entropie, vnitřní energie, entalpie, Gibbsova energie). Systém nespěje jako u rovnovážného systému k nulové produkci entropie, ale pouze k její minimální hodnotě. Tento ustálený stav se pak nazývá stacionární.

Lineární nerovnovážná termodynamika (1)

- Pro stavy nepříliš vzdálené od termodynamické rovnováhy platí **Prigoginův princip**:
- Při neměnicích se vnějších podmínkách otevřený systém spontánně spěje do stavu s minimální produkcí entropie.** Tento stav se nazývá **stacionární stav** (ustálený stav, stav dynamické rovnováhy, „steady state“, resp. homeostáza v biologii). Není totožný se stavem „termodynamické rovnováhy“.

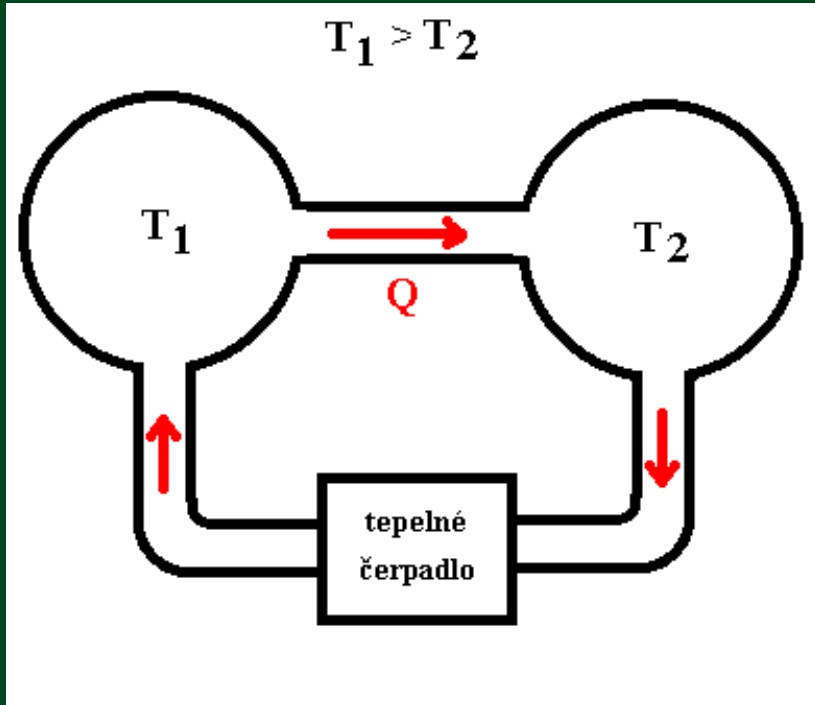
Stacionární stav v otevřeném systému (teplota, látkové složení, rychlost chemických reakcí jsou konstantní), ale systém sám koná práci ve smyslu trvale probíhající přeměny energie.



- U živých organismů je to schopnost udržovat stabilní vnitřní prostředí, které je nezbytnou podmínkou jejich fungování a existence, i když se vnější podmínky mění. Příkladem organické homeostázy je udržování tělesné teploty.
- Kyberneticky se homeostáza vysvětluje jako záporná zpětná vazba, která na základě chybového signálu redukuje odchylky od normativní, správné hodnoty. Zařízení nebo systém, který takto funguje, se nazývá homeostat.

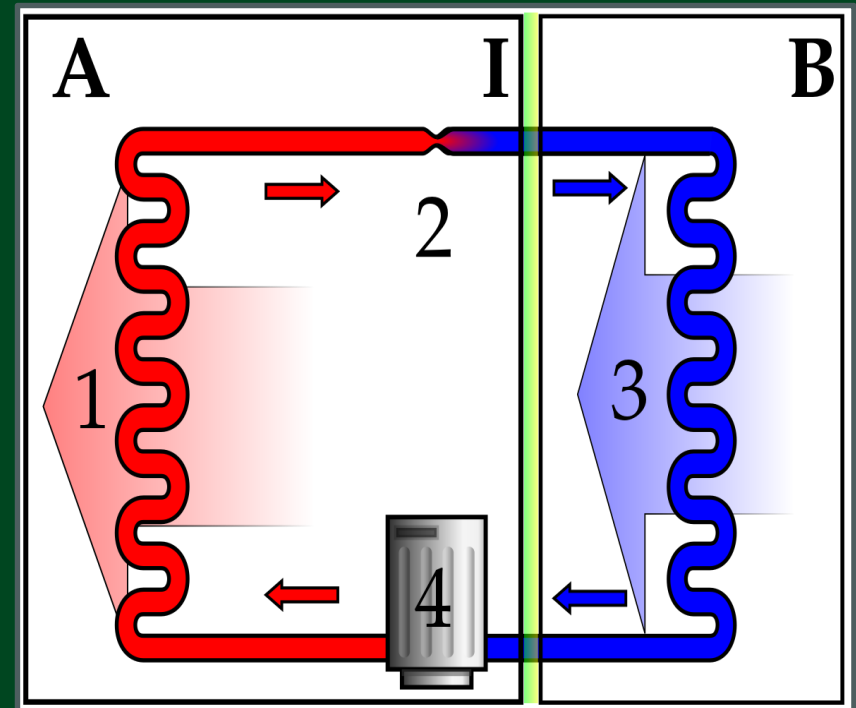
Stacionární stav - příklady

Tepelné čerpadlo



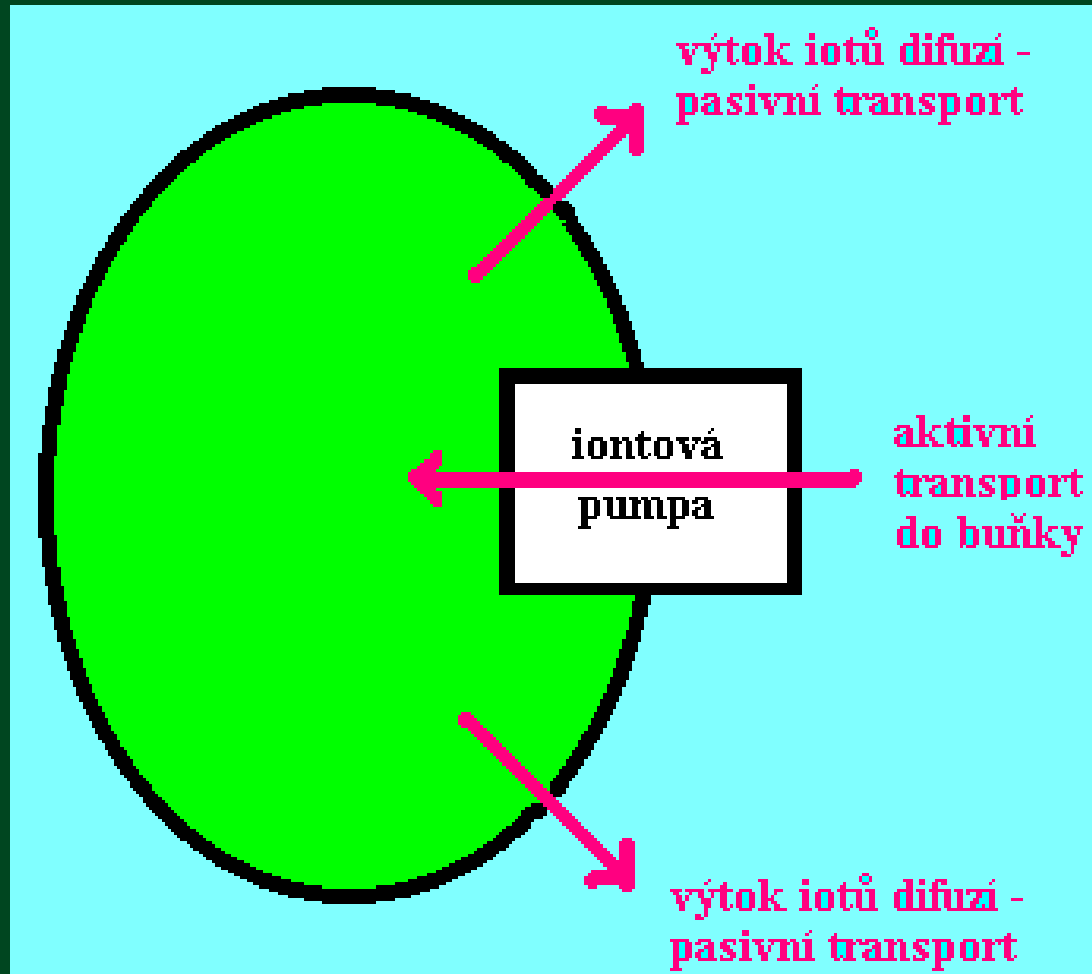
Konstatní rozdíl teplot lze udržet pouze v otevřeném systému s tepelnou pumpou, která spotřebovává energii (elektrickou).

Lednička



Princip kompresorového chlazení:
A – teplá část, B – studená část. 1 – kondenzátor, 2 – expanzní ventil, 3 – výparník, 4 – kompresor

Stacionární stav - příklady



Iontová pumpa udržuje konstantní rozdíl v koncentracích iontů v buňce/organele a spotřebovává energii (chemickou – ATP, světelnou – bakteriorhodopsin).

Př. Svalová buňka udržuje vysokou koncentraci Ca^{2+} iontů v sarkoplazmatickém retikulu pomocí aktivního transportu iontovou pumpou za spotřeby ATP před svalovou kontrakcí.

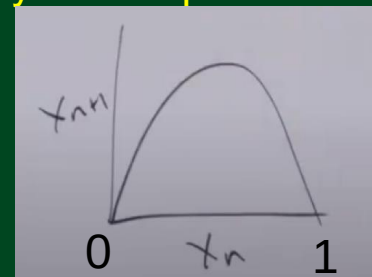
Lineární nerovnovážná termodynamika (2)

- Pro stavy nepříliš vzdálené od stacionárního stavu platí **Le Chatelierův princip**
- **Fluktuace** - malé odchylky od rovnovážného nebo stacionárního stavu – mají vnitřní příčinu v náhodných procesech. Podobně se projevují následky působení **poruchových sil** – malých zásahů do systému z vnějšku.
- **V blízkosti stacionárního stavu vyvolávají fluktuace či poruchové síly takové toky látky a energie, že se jimi tyto fluktuace (účinky poruchových sil) likvidují = obnovení stacionárního stavu.**
- **Kritický neboli bifurkační bod:** systém vzdalující se od stacionárního stavu, v určitém okamžiku narazí na meze své stability a dosáhne tzv. bifurkačního (čili větvcího) bodu - systém pak může dosáhnout dvou či více stacionárních stavů
- Příklad – „**logistic map**“. Uvažujme populaci králíků o počtu x_n , kteří v prostředí rostou rychlostí r . Za jednotku času se populace zvýší ($r > 1$) nebo sníží ($r < 1$) na $x_{n+1} = r x_n$. Dále uvažujme, že jejich populace se vlivem různých faktorů prostředí snižuje (potrava, prostor) tím více, čím je populace vyšší [faktor $(1 - x_n)$]. Oba faktory se projeví v dynamice podle rovnice

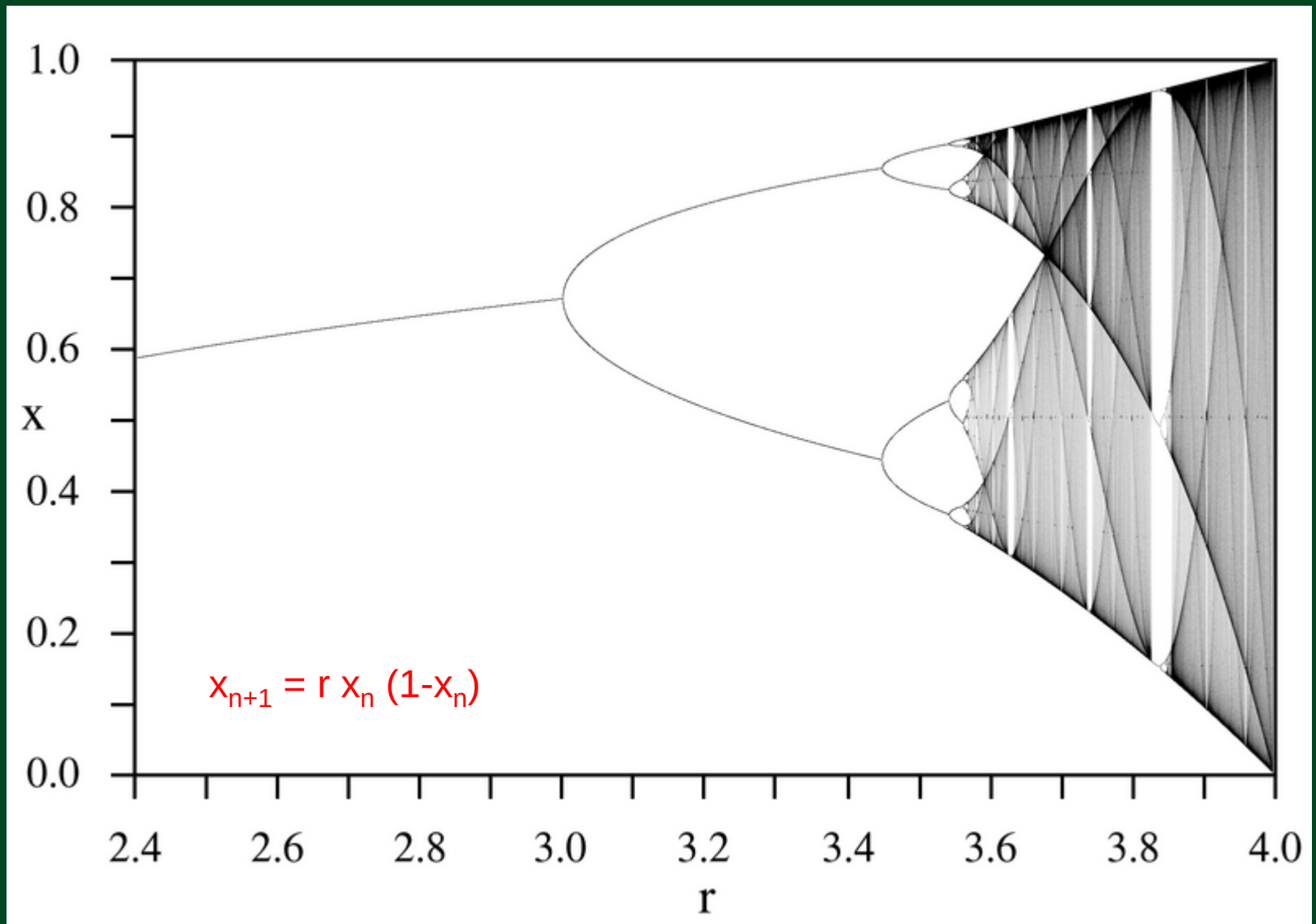
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Vývoj populace v čase pro různá r ?

(<https://www.nathaniel.ai/logistic-map>,
<https://www.benlcollins.com/spreadsheets/logistic-map>)



„Logistic map“ - bikurkace



„Logistic map“ – bikurkace – v reálném světě

Synchronous Period-Doubling in Flicker Vision of Salamander and Man

Journal of Neurophysiology 79, 1869-78, 1998

DANIEL W. CREVIER AND MARKUS MEISTER

Department of Molecular and Cellular Biology, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138

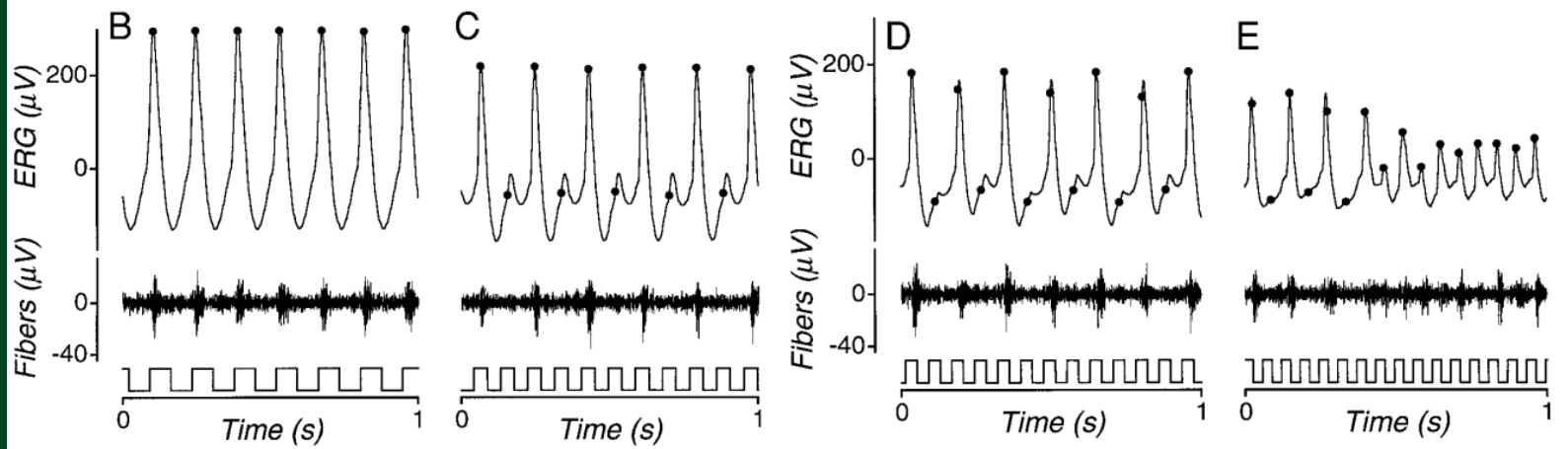


FIG. 1. Response of the salamander retina to uniform flicker. Recordings of the electroretinogram (ERG; top trace) and optic nerve fibers (middle) to the uniform flash stimulus (bottom), at a flash frequency of $f = 1$ Hz (A), 7 Hz (B), 11 Hz (C), 13 Hz (D), 16 Hz (E). Filled circles on the ERG trace indicate the value at a given delay during each flash interval, illustrating that the response repeats on every stimulus cycle in B, every 2 cycles in C, every 4 cycles in D, and lacks recognizable periodicity in E. For each flash rate, the delay was chosen to include the maximum of the waveform.

„Logistic map“ – bikurkace – v reálném světě

Synchronous Period-Doubling in Flicker Vision of Salamander and Man

Journal of Neurophysiology 79, 1869-78, 1998

DANIEL W. CREVIER AND MARKUS MEISTER

Department of Molecular and Cellular Biology, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138

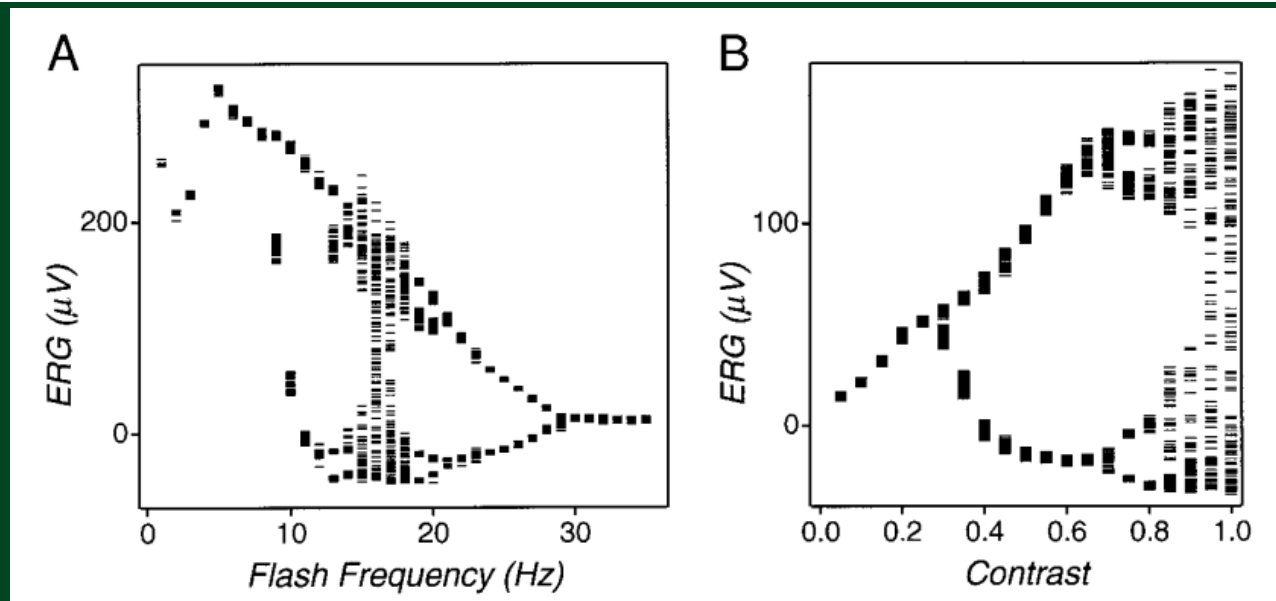


FIG. 4. Bifurcation plot of the salamander ERG. *A*: ERG amplitude as a function of flash frequency at contrast $C = 1.0$. For each frequency value on the abscissa, the ERG was recorded for 12 s. The maximum of this waveform was located, and the values at the corresponding phase in all other flash intervals were plotted on the ordinate. These correspond to the markers on the ERG trace in Fig. 1, *B–E*. *B*: ERG amplitude as a function of contrast at flash frequency $f = 16$ Hz, displayed as in *A*.

„Logistic map“ – bikurkace – v reálném světě

Synchronous Period-Doubling in Flicker Vision of Salamander and Man

Journal of Neurophysiology 79, 1869-78, 1998

DANIEL W. CREVIER AND MARKUS MEISTER

Department of Molecular and Cellular Biology, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138

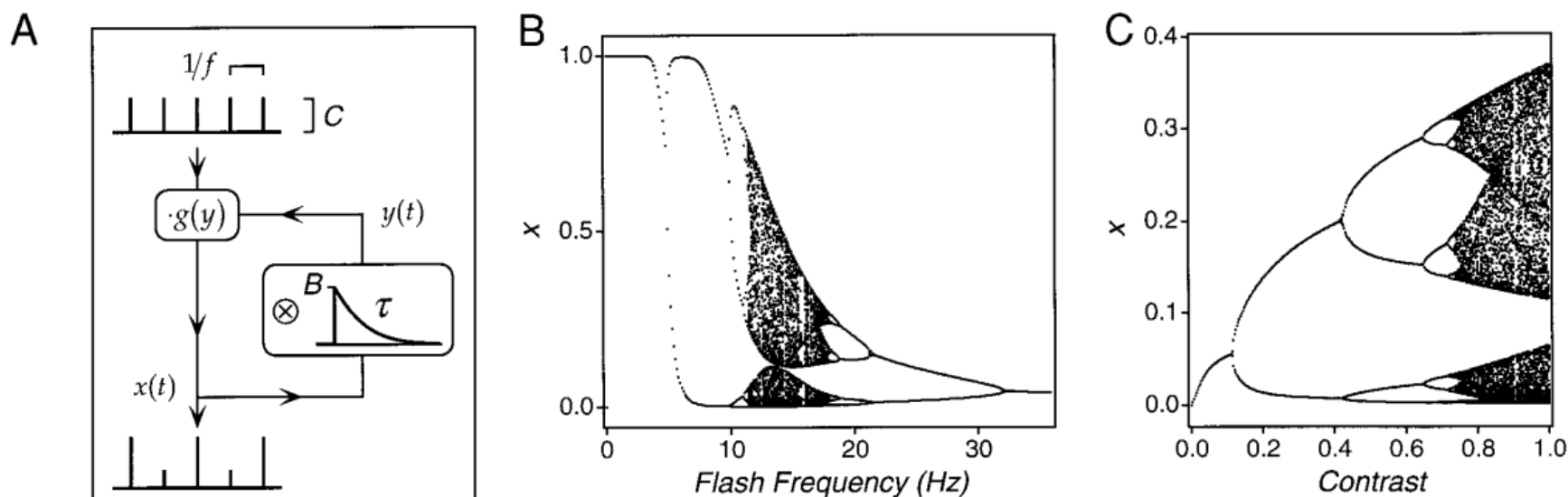


FIG. 5. Period-doubling in a model of nonlinear feedback. *A*: diagram of the model: input pulses are multiplied by a variable gain that depends on the amplitude of preceding output pulses. See text for details. *B* and *C*: bifurcation plots of the output pulse amplitude, x , as a function of flash frequency (*B*) and contrast (*C*). $B = 35$, $\tau = 58$ ms.

„Logistic map“ – bikurkace – v reálném světě

Controlling Cardiac Chaos

Alan Garfinkel, Mark L. Spano, William L. Ditto, James N. Weiss

The extreme sensitivity to initial conditions that chaotic systems display makes them unstable and unpredictable. Yet that same sensitivity also makes them highly susceptible to control, provided that the developing chaos can be analyzed in real time and that analysis is then used to make small control interventions. **This strategy has been used here to stabilize cardiac arrhythmias induced by the drug ouabain in rabbit ventricle. By administering electrical stimuli to the heart at irregular times determined by chaos theory, the arrhythmia was converted to periodic beating.** *Science 257, 1230-5, 1992*

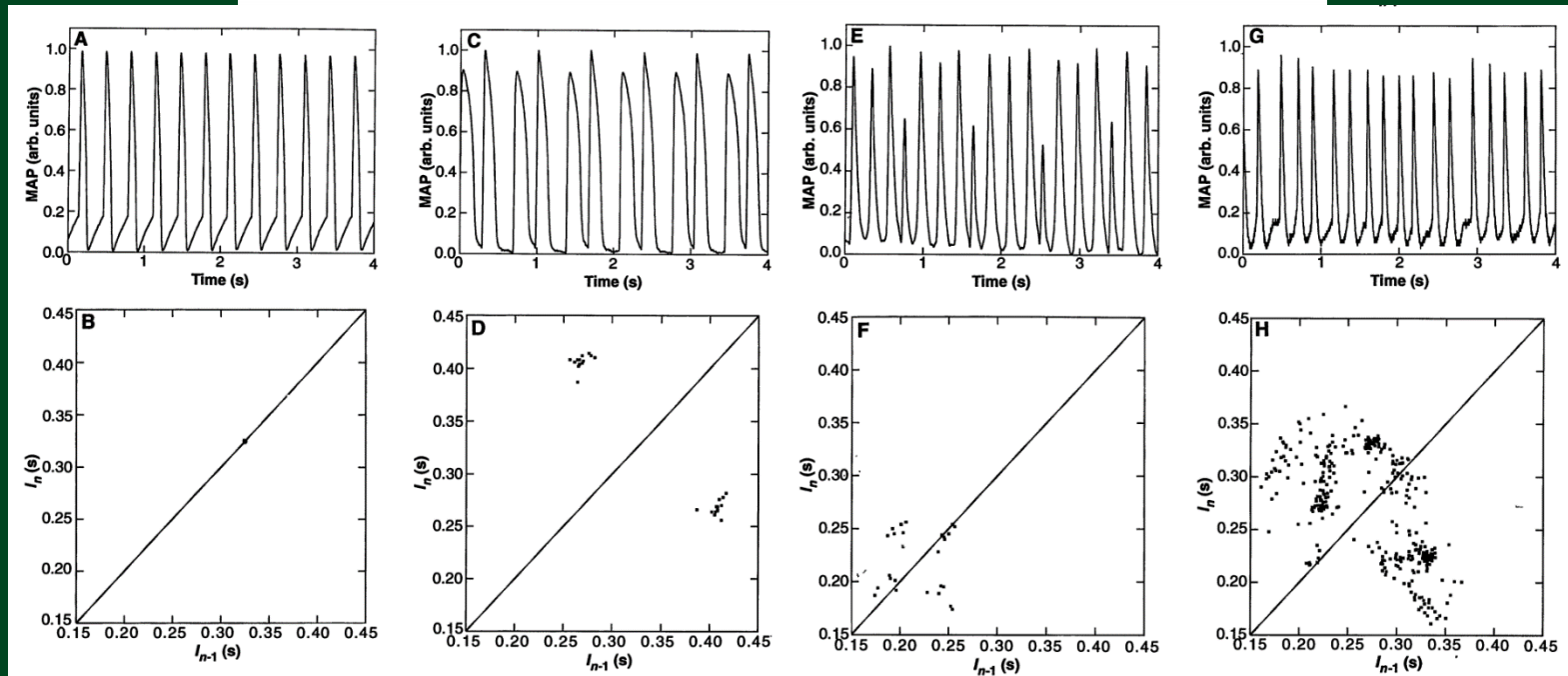


Fig. 1. Recordings of monophasic action potentials (MAPs) (**A, C, E, and G**) and their respective Poincaré maps of interbeat intervals (**B, D, F, and H**) at various stages during arrhythmias induced by ouabain-epinephrine in typical rabbit septa. Typically the arrhythmia was initially characterized by spontaneous periodic beating at a constant interbeat interval (**A and B**), then developed bigeminal or period 2 patterns (**C and D**) or higher order periodicities such as a period 4 pattern (**E and F**), and lastly a completely aperiodic pattern (**G and H**). Note that in the Poincaré map of the final stage the points form an extended structure that is not point-like or a set of points (that is, not periodic) and is not space-filling (that is, not random). This is a sign of chaos.

Controlling Cardiac Chaos

Alan Garfinkel, Mark L. Spano, William L. Ditto, James N. Weiss

The extreme sensitivity to initial conditions that chaotic systems display makes them unstable and unpredictable. Yet that same sensitivity also makes them highly susceptible to control, provided that the developing chaos can be analyzed in real time and that analysis is then used to make small control interventions. This strategy has been used here to stabilize cardiac arrhythmias induced by the drug ouabain in rabbit ventricle. By administering electrical stimuli to the heart at irregular times determined by chaos theory, the arrhythmia was converted to periodic beating. *Science* 257, 1230-5, 1992

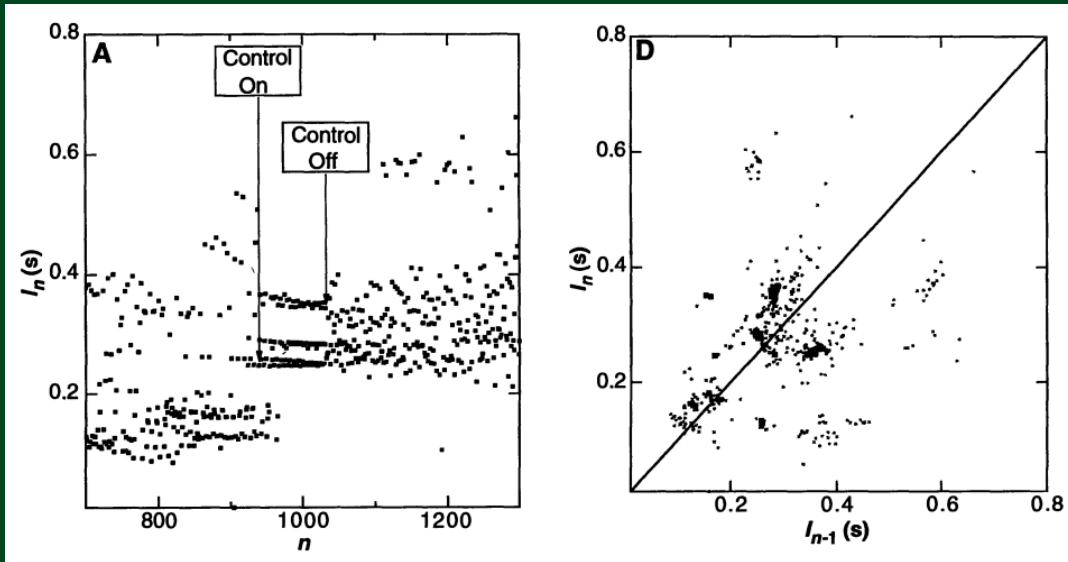


Fig. 3. (A, B, and C) Interbeat interval I_n versus beat number n during the chaotic phase of the ouabain-epinephrine-induced arrhythmia in three typical hearts. The region of chaos control is indicated. In (C) a region during which periodic pacing was applied is also indicated. Note that

„Logistic map“ – bikurkace – v reálném světě

JOURNAL ARTICLE

Chaos in the cardiovascular system: an update ^{FREE}

Claus D Wagner, Pontus B Persson ✉

Cardiovascular Research, Volume 40, Issue 2, November 1998, Pages 257–264,
[https://doi.org/10.1016/S0008-6363\(98\)00251-X](https://doi.org/10.1016/S0008-6363(98)00251-X)

Published: 01 November 1998 **Article history** ▼

PDF Split View Cite Permissions Share ▼

Abstract

Rhythmic changes of blood pressure, heart rate, and other cardiovascular measures have drawn the attention of several investigators, since these oscillations can shed light onto the activity of the underlying control network. The overwhelming proportion of circulatory variations, however, are not linear, i.e., they do not consist of perfectly rhythmic components. Thus, these fluctuations are more adequately analysed by non-linear techniques, most of which are adopted from chaos theory. A spotlight issue of 'Cardiovascular Research' (Vol. 31, 1996), focused on chaos in the cardiovascular system. This current review outlines today's understanding of this field by presenting the major discoveries and developments which have taken place since then.

RESEARCH ARTICLE | DECEMBER 11 2019

Autonomic control is a source of dynamical chaos in the cardiovascular system

A. S. Karavaev  ; Yu. M. Ishbulatov  ; V. I. Ponomarenko  ; B. P. Bezruchko  ; A. R. Kiselev  ;
M. D. Prokhorov 

 Check for updates

Chaos 29, 121101 (2019)

<https://doi.org/10.1063/1.5134833> **Article history** 

Views ▼

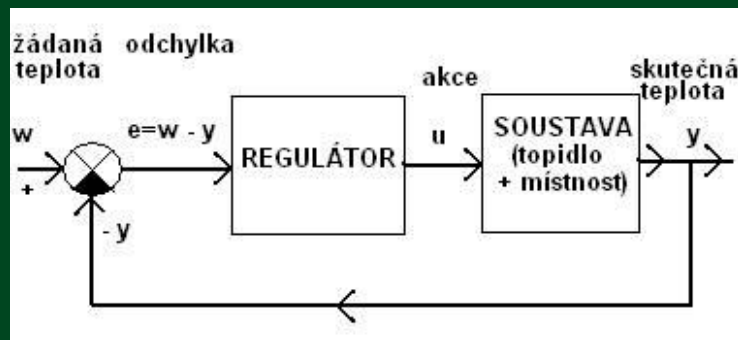
Share ▼

Tools ▼

The origin of complex irregular dynamics in a cardiovascular system is still being actively debated. Some hypotheses suggest the crucial role of stochastic modulation of cardiovascular parameters, while others argue for the importance of cardiac pacemakers' chaotic deterministic dynamics. In the present study, we estimate the largest Lyapunov exponent and the correlation dimension for the 4-h experimental interbeat intervals and the chaotic signals generated by the mathematical model of the cardiovascular system. We study the complexity of the mathematical model for such cases as the autonomic blockade, the exclusion of all the stochastic components, and the absence of variability of respiration. The obtained results suggest that the complexity of the heart rate variability is largely due to the chaotic dynamics in the loops of autonomic control of circulation.

Analogie k „logistic map“ v regulační technice - regulační systém se zpětnou vazbou ?

Př.: termostat



Nelineární nerovnovážná termodynamika

- Nerovnovážná termodynamika - vzdálená od stacionárního stavu – Ilja Prigodine (Nobelova cena za chemii v roce 1977)
- Prigogine prokázal, že za takových podmínek může existovat nová forma uspořádaných struktur, a dal jim název "**disipativní struktury**", aby zdůraznil, že existují pouze ve spojení se svým okolím (disipace – nevratná přeměna energie jedné formy na jinou).
- Nejznámější disipativní strukturou je zřejmě takzvaná **Benárdova nestabilita**. Ta vzniká při zahřívání vrstvy kapaliny zespodu. Při dané teplotě začne docházet k vedení tepla převážně konvekcí a lze pozorovat, že se ve vrstvě kapaliny vytvářejí pravidelně rozmístěné šestihranné konvekční buňky. Tato struktura je zcela závislá na dodávce tepla a po jejím ukončení zaniká (video na další straně)
- **Disipativní struktury v blízkosti rovnováhy mají tendenci se ničit, ale daleko od rovnováhy se může uspořádání udržovat a vytvářet nové struktury.** Pravděpodobnost vzniku řádu z neuspořádanosti je podle zákonů náhody nekonečně malá. Vznik uspořádaných disipativních systémů však ukazuje, že je možné vytvořit řád z neuspořádanosti.

Benárdova nestabilita

- viskozní olej s hliníkovým práškem
- <https://www.youtube.com/watch?v=v2vMXmuC818>
- Ohřívání polévka - <https://www.youtube.com/watch?v=nQUH9nGTZTY>



Vysvětlení:

Proudění kapaliny v hexagonálních buňkách směřuje obvykle ve středu buňky nahoru a podél okrajů buňky dolů. Jedná se prakticky o kombinaci konvekce a nehomogenity povrchového napětí, která vzniká v důsledku fluktuací teploty v povrchové vrstvě tekutiny.

větší vertikální gradient teploty - menší buňky, menší gradient teploty - větší buňky.

Nelineární nerovnovážná termodynamika

- Vznik disipativních struktur spojených s chemickými reakcemi je spojen s autokatalytickými reakcemi
- $$nA + X \Rightarrow 2X + (n - 1)A$$
- V autokatalytické reakci vzniká z látky A za přítomnosti látky X opět látka X. Látka X působí jako katalyzátor při svém vzniku. Při dostatečné zásobě látky A roste množství látky X exponenciálně.
- Příkladem vzniku chemických disipativních struktur je Bělousova-Žabotinského reakce (oregonátor), **autokat. reakce**

- $$A + Y \rightarrow X + P,$$

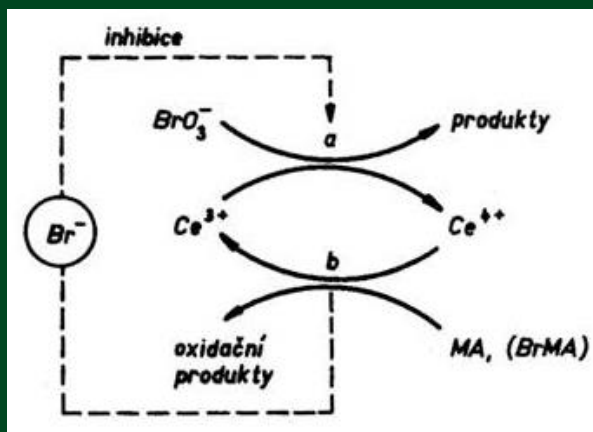
$$A + X \rightarrow Z + 2X,$$

$$X + Y \rightarrow 2P$$

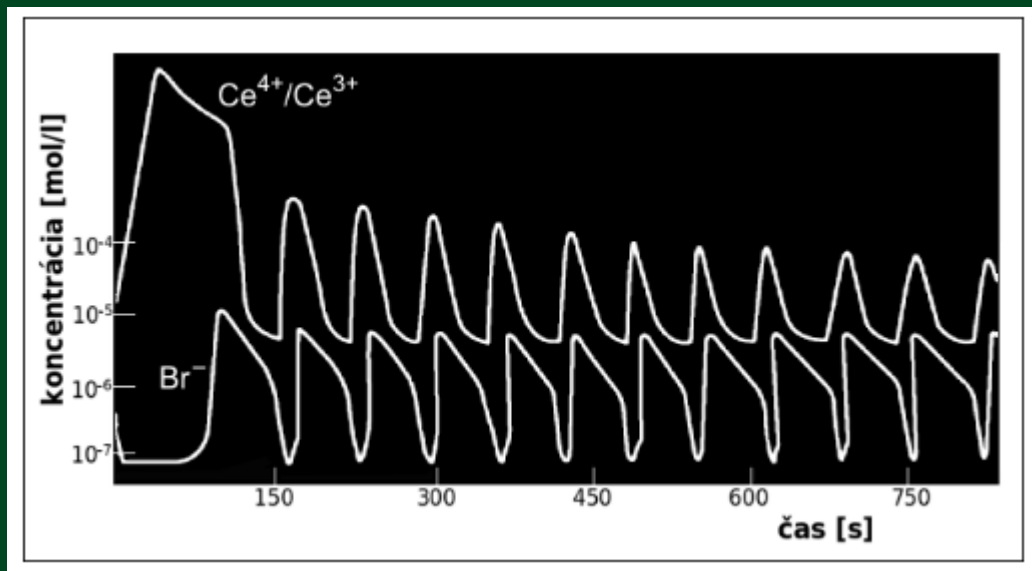
$$2X \rightarrow A + P,$$

$$B + Z \rightarrow f Y$$

- A = BrO_3^- , Y = Br^- ,
- X = HBrO_2 , Z = 2Ce^{4+} ,
- P = HBrO ,
- B značí oxidovanou organickou látku

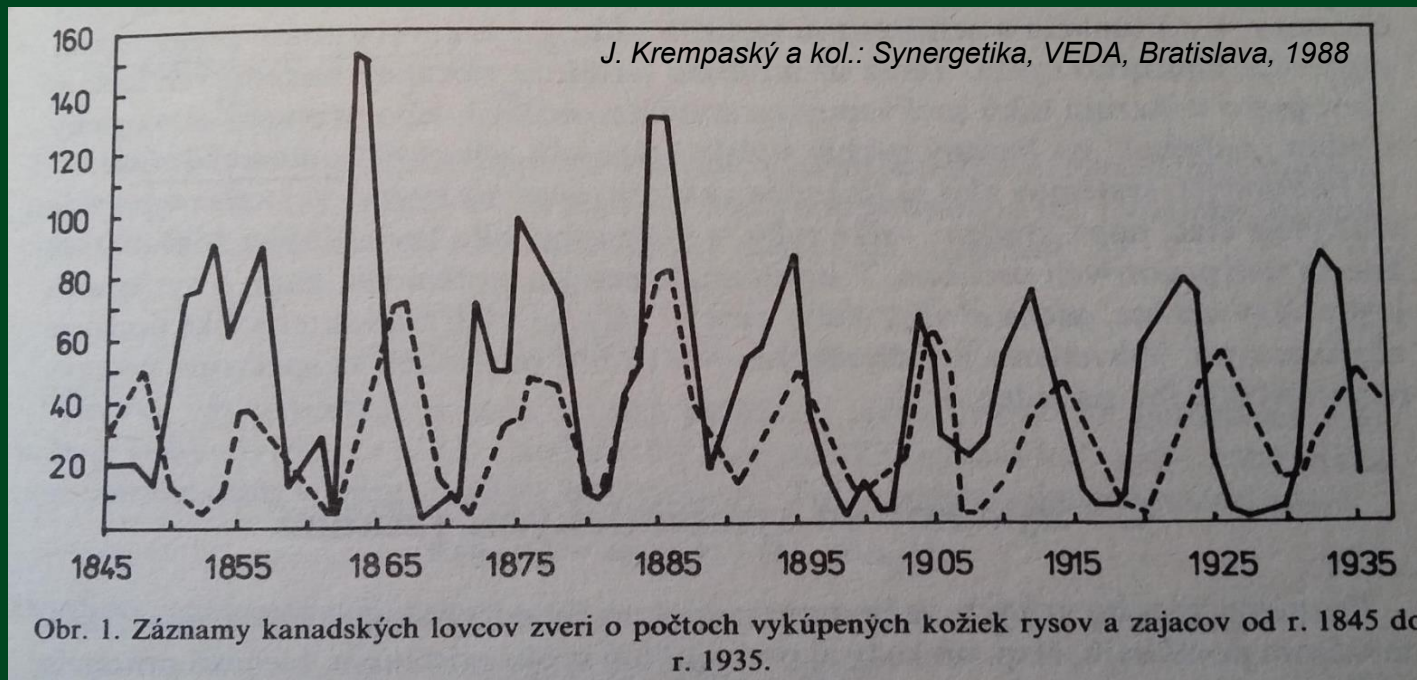


Nelineární nerovnovážná termodynamika



Nelineární nerovnovážná termodynamika

- Matematické modely reakční kinetiky komplexních autokatalytických reakcí dokazují že „Stabilně může autokatalytický proces existovat pouze tehdy, jestliže OSCILUJE „kolem“ STACIONÁRNÍHO STAVU“
- Autokatalýza v biologii – nárůst populace. Stabilita populace je zaručována např. predátory (model kořisti a dravce)



Nelineární nerovnovážná termodynamika

- Autokatalytickou reakcí svého druhu je i replikace DNA. Ke stejnému výsledku může vést komplex “obyčejných” chemických reakcí.
- Komplex normálních chemických reakcí se může vnějškově projevovat jako jedna nebo několik (spřažených) autokatalytických reakcí. Replikace DNA je komplex metabolických pochodů, jehož výsledkem je vznik kopie molekuly, nesoucí genetickou informaci.
- Příklad z sociologie: Město s dopravou, průmyslem, infrastrukturou atd. je funkční pouze na základě neustálé výměny energie a látek s okolím. Izolace města, zastavení výměny, degradace → zánik města
- Závěr: **Živé organismy jsou z hlediska termodynamiky otevřené systémy vzdálené od termodynamické rovnováhy, které jsou regulovány a řízeny. Život lze proto pochopit pouze na základě nelineární nerovnovážné termodynamiky! Exaktní termodynamická teorie takových systémů však nebyla dosud vytvořena.**

Fraktály

- Fraktál - množina, jejíž Hausdorffova dimenze D je větší než dimenze topologická (původní Mandelbrotova definice)
- Pro Hausdorffovu dimenzi obecně platí:

$$N \cdot s^D = 1 \text{ a tedy } D = \log N / \log(1/s)$$

- N ... počet dílů, na které se objekt rozdělí, s ... měřítko
- Úsečka $D = \log N / \log(1/s) = 1$, protože $N = 1/s$ (např. $S = 1/2$, $N = 2$)
- Čtverec $D = \log N / \log(1/s) = 2$, protože $N = 1/s^2$ (např. $S = 1/2$, $N = 4$)
- Krychle $D = \log N / \log(1/s) = 3$, protože $N = 1/s^3$ (např. $S = 1/2$, $N = 8$)
nejdou fraktály
- Kochova křivka: $D = \log N / \log(1/s) = 1,2618595$, protože $N = 4$ a $s = 3$
je fraktál

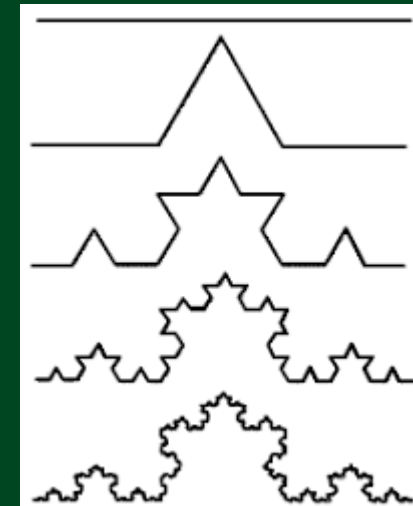
Příklady:

obvod pobřeží – 1,26

povrch mozku člověka – 2,76

obvod 2D průmětu mraku – 1,33

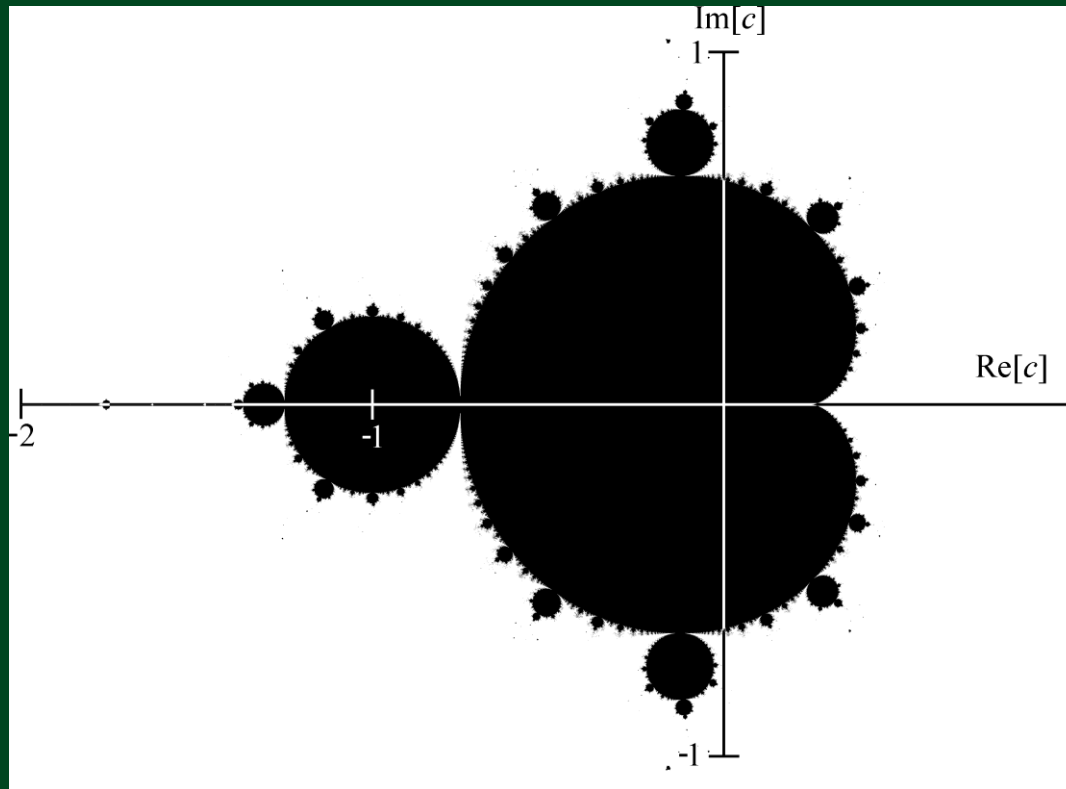
- Hodnota Hausdorffovy dimenze udává, s jakou rychlostí velikost útvarů roste do nekonečna.



Fraktály

- Jednodušší (méně obecná) definice - **geometrický objekt, který je soběpodobný (matematické objekty)/soběpříbuzný (přírodní objekty)**
- Tj., pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku nebo rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar (motiv);
- Fraktál mívá na první pohled velmi složitý tvar, ale je generován opakovaným použitím jednoduchých pravidel.
- Termín fraktál použil poprvé matematik Benoît Mandelbrot v roce 1975. Pochází z latinského fractus – rozbitý.
- [VIDEO](https://www.youtube.com/watch?v=v0xwAdndZYo) (https://www.youtube.com/watch?v=v0xwAdndZYo)
- Nejslavnější útvar s fraktálními prvky - **Mandelbrotova množina** (fraktálem je jen její okraj). Je definována posloupnost komplexních čísel $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $z_0 = 0$. Bod c tedy patří do Mandelbrotovy množiny právě tehdy, když je tato funkce omezená.

Mandelbrotova množina



- Mandelbrot zoom sequence (<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=b005iHf8Z3g>)
- This equation will change how you see the world (the logistic map) i souvislost s Mandelbrotovou množinou (<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=ovJcsL7vyrk>)
- Feigenbaumova konstanta – transcendentní číslo (jako π) – význam ???